LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

I. DARBO UŽDAVINIAI

(2020–2022)

Teorinę medžiagą parengė bei pirmąją užduotį sudarė mokytojas ekspertas Kazimieras Pulmonas

Darbai, darbeliai... Kiekvieno žmogaus gyvenime svarbią vietą užima darbas. Apskritai – darbinė veikla. Gal todėl nemažą įvairių gyvenimiškų problemų sprendimo dalį, mokantis matematikos, sudaro taip vadinami darbo uždaviniai. Nors neretai jų siužetai nebūtinai susieti su fiziniu darbu, o labiau su veikla, t. y. vyksmu laike ir to vyksmo rezultatais.

1 pavyzdys. Sodo nameliui pastatyti per 50 dienų reikia aštuonių žmonių. Kiek reikia taip pat sparčiai dirbančių žmonių, kad namelis būtų pastatytas per 40 dienų?

Sprendimas. 1 būdas. Tam tikram darbui padaryti žmonių ir dienų skaičiai yra atvirkščiai proporcingi. Todėl:

50 dienų – 8 žmonės,
40 dienų – x žmonės; $\Rightarrow \frac{x}{8}=\frac{50}{40}$ ir $40x=50\cdot 8, \quad x=10.$

Vadinasi, kad namelis būtų pastatytas per 40 dienų, reikia 10 taip pat sparčiai dirbančių žmonių.

2 būdas. Sodo namelio statybos apimtis yra $8\cdot 50=400$ dienų. Kad šių darbų apimtį atliktų per 40 dienų, reikia $400:40=10$ taip pat sparčiai dirbančių žmonių.

Kartais sprendžiant darbo tipo uždavinius naudojama formulė: $A=N\cdot t,$ čia A – darbas, N – darbo našumas (spartumas), t – darbo atlikimo laikas.

Todėl $N=\frac{A}{t}$ arba $t=\frac{A}{N}$. Vadinasi, *darbo našumas* (spartumas) yra darbo apimtis (kiekis) atliekama(s) per laiko vienetą, o *laikas* yra darbo apimties (kiekio) ir darbo našumo (spartumo) santykis.

2 pavyzdys. Darbininkų brigada pagal sutartį turėjo pagaminti 300 detalių. Kasdien pagamindama po 4 detales daugiau negu buvo numatyta, brigada užduotį atliko viena diena anksčiau. Per kiek dienų brigada įvykdė užduotį?

Sprendimas. 1 būdas. Sakykime, kad brigada įvykdė užduotį per x dienų, o planavo įvykdyti per $(x+1)$ dieną.

Per 1 dieną brigada pagamino $\frac{360}{x}$ detalių, o planavo pagaminti $\frac{360}{x+1}$ detalių.

Pagal sąlygą: $\frac{360}{x}-\frac{360}{x+1}=4.$

$\frac{360x+360-360x}{x(x+1)}=4, \quad \frac{360}{x(x+1)}-4=0, \quad \frac{360-4x^2-4x}{x(x+1)}=0,$ tai $4x^2+4x-360=0$ ir $x^2+x-90=0;$

turime $x_1=-10$ (netinka), $x_2=9.$ Patikrinimu įsitikiname, kad brigada įvykdė užduotį per 9 dienas.

Vietoj sprendimo aprašymo ar komentavimo kartais naudojama ir lentelė

	Darbo apimtis	Dienų skaičius	Darbo našumas
Faktinis darbas	360	x	$\frac{360}{x}$
Darbas pagal planą	360	$x+1$	$\frac{360}{x+1}$

Pagal sąlygą sudarome lygtį: $\frac{360}{x}-\frac{360}{x+1}=4.$

Išsprendę ją turime, kad brigada įvykdė užduotį per 9 dienas.

Paprastai darbas ar veikla susiję su atlyginimu. Dažnai jis susijęs su darbuotojo užimamomis pareigomis, darbo stažu, kompetencijomis ir dar daug su kuo... Nors nepriimta skaičiuoti svetimus pinigus, tačiau šį kartą pasmalsaukime:

3 pavyzdys. Du darbininkai gavo kartu 557 eurus. Pirmasis dirbo 10 valandų, o antrasis – 12 valandų. Jei pirmasis būtų gavęs už valandą 1,5 euro mažiau, o antrasis – 10 % mažiau, tai antrasis už 12 valandų būtų gavęs 50,8 eurų daugiau, negu pirmasis už 10 valandų. Kiek gavo kiekvienas darbininkas už darbo valandą?

Sprendimas. Pasirenkame iš įvairių galimų sprendimo apipavidalinimo būdų, pavyzdžiui, komentuojamąjį:

x Eur – I darbininko valandinis atlygis,
y Eur – II darbininko valandinis atlygis.
Pagal sąlygą: $10x + 12y = 557$.

Naujoje situacijoje
$(x - 1{,}5)$ Eur – I darbininko uždarbis per valandą,
$0{,}9y$ Eur – II darbininko uždarbis per valandą,
Pagal sąlygą:

$$0{,}9y \cdot 12 - (x - 1{,}5) \cdot 10 = 50{,}8.$$

Iš lygčių sudarome sistemą:

$$\begin{cases} 10x + 12y = 557, \\ 10{,}8y - 10x = 35{,}8; \end{cases}$$

Panariui sudėję sistemos lygtis turime $22{,}8y = 592{,}8$ ir $y = 26$.

Vadinasi, $10x = 557 - 312$ ir $x = 24{,}5$.

Patikrinimu įsitikiname, kad pirmojo darbininko valandinis atlygis yra 24,5 Eur, o antrojo – 26 Eur.

Paprastai įprasta darbo uždaviniuose visą darbą prilyginti 1 (vienetu). Todėl kartais darbo uždaviniai priskiriami vieneto ir dalių uždavinių tipui.

4 pavyzdys. Janė savo užduotį gali atlikti per 15 h, o Paulės užduotį – per 30 h. Paulė savo užduotį gali atlikti per 25 h.

a) Kiek kartų Paulė dirba našiau (sparčiau) už Janę?
b) Per kiek laiko Paulė atliktų Janės užduotį?
c) Per kiek laiko Janė ir Paulė, dirbdamos kartu, gali atlikti abu tuos darbus?

Sprendimas. Sakykime, kad Paulės užduoties apimtis yra 1. Tai per 1 h Janė padaro $\frac{1}{30}$ šios užduoties, o Paulė – $\frac{1}{25}$ užduoties.

a) Paulė dirba našiau (sparčiau) už Janę $\frac{1}{25} : \frac{1}{30} = 1{,}2$ karto.

b) Kadangi Janė savo užduotį atlieka per 15 h, tai Paulė galėtų ją atlikti per $15 : 1{,}2 = 12{,}5$ valandos.

c) *1 būdas (aritmetinis).*

Per 1 h
- Janė atlieka savo užduoties $\frac{1}{15}$ dalį,
- Paulė atlieka savo užduoties $\frac{1}{25}$ dalį,
- Janė ir Paulė atlieka kartu $\frac{1}{15} + \frac{1}{25} = \frac{10+6}{150} = \frac{16}{150} = \frac{8}{75}$ dalį savo užduočių.

Kadangi Janės ir Paulės užduočių apimtis $1 + 1 = 2$, tai abi užduotys bus atliktos per $2 : \frac{8}{75} = \frac{150}{8} = 18{,}75\ (h)$.

2 būdas (algebrinis).

Janės darbo našumas $\frac{1}{15}$, Paulės darbo našumas $\frac{1}{25}$, o abiejų merginų kartu $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25}\right)$.

Sakykime, kad kartu merginos dirba *t* valandų, tai:

$$\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25}\right) \cdot t = 2, \quad \frac{8}{75} \cdot t = 2, \quad \text{tai} \quad t = 2 : \frac{8}{75} = 18{,}75 \ \text{(h)}.$$

Vadinasi, a) 1,2 karto; b) 12,5 h; c) 18,75 h.

Pastaba. Beje, skaičius 18,75 yra skaičių 15 ir 25 harmoninis vidurkis. (Dviejų teigiamų skaičių a ir b *harmoniniu* vidurkiu vadinamas toks skaičius H, kuriam atvirkštinis skaičius $\frac{1}{H}$ yra lygus skaičiams a ir b atvirkštinių skaičių $\frac{1}{a}$ ir $\frac{1}{b}$ aritmetiniam vidurkiui, t. y. $\frac{1}{H}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):2.$ Pertvarkę gauname $H=\frac{2ab}{a+b}$.

5 pavyzdys. Trim vamzdžiais baseinas pripildomas per 2 h. Vienu vamzdžiu baseiną būtų galima pripildyti per 5 h, antru – per 6 h. Per kiek laiko baseiną būtų galima pripildyti trečiu vamzdžiu?

Per 1 h
- pirmas vamzdis pripildo $\frac{1}{5}$ baseino,
- antras vamzdis pripildo $\frac{1}{6}$ baseino,
- trečias vamzdis pripildo $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{11}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ baseino.

Trečias vamzdis pripildo baseiną per $1:\frac{2}{15}=7{,}5$ (h).

2 būdas (algebrinis).

	Laikas, h	Našumas
I vamzdis	5	$\frac{1}{5}$
II vamzdis	6	$\frac{1}{6}$
III vamzdis	x	$\frac{1}{x}$

Sudarome lygtį:

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{x}\right)\cdot 2=1,\quad \frac{11x+30}{30x}\cdot 2=1,\quad \frac{11x+30}{15x}=1.$$

Trupmena lygi 1, kai skaitiklis ir vardiklis yra lygūs:

$$11x+30=15x,\quad 4x=30,\quad x=7{,}5.$$

Patikrinimu įsitikiname, kad trečias vamzdis pripildo baseiną per 7,5 h.

6 pavyzdys. Gatvę valė iš pradžių viena mašina, o po 15 min į darbą stojo antra mašina, ir po to abi mašinos baigė valyti gatvę per 18 min. Jei antroji mašina būtų pradėjusi darbą praslinkus pusvalandžiui nuo pirmosios mašinos darbo pradžios, tai abi mašinos, dirbdamos kartu, būtų baigusios valyti gatvę per 12 min. Per kiek laiko kiekviena mašina, dirbdama viena, galėjo išvalyti gatvę?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmoji mašina, dirbdama viena, gali išvalyti gatvę per x min, o antroji – per y min. Tuomet pirmosios mašinos darbo našumas $\frac{1}{x}$, o antrosios – $\frac{1}{y}$.

Vienu atveju pirmoji mašina valė gatvę $15+18=33$ (min), o antroji – 18 min.

Pagal sąlygą: $\frac{33}{x}+\frac{18}{y}=1.$

Kitu atveju pirmoji mašina valė gatvę $30+12=42$ (min), o antroji – 12 min.

Pagal sąlygą: $\frac{42}{x}+\frac{12}{y}=1.$

Turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases}\frac{33}{x}+\frac{18}{y}=1, & |\cdot 2\\ \frac{42}{x}+\frac{12}{y}=1; & |\cdot 3\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{66}{x}+\frac{36}{y}=2, & (1)\\ \frac{126}{x}+\frac{36}{y}=3; & (2)\end{cases}$$

Iš antrosios lygties atėmę pirmąją turime: $\frac{60}{x}=1$ ir $x=60$. Nesunkiai įsitikiname, kad $y=40$.

Taigi pirmoji mašina gali išvalyti gatvę per 60 min, o antroji per 40 min.

7 pavyzdys. Du darbininkai, dirbdami kartu, gali atlikti darbą 9 dienomis greičiau, negu jį atliktų vienas pirmasis, ir 7 dienomis greičiau, negu jį atliktų vienas antrasis. Per kiek dienų šį darbą gali atlikti kiekvienas darbininkas, dirbdamas atskirai?

Sprendimas. Tegul x dienų – I darbininko darbo laikas,

y dienų – II darbininko darbo laikas,

$\frac{1}{x}$ – I darbininko darbo našumas,

$\frac{1}{y}$ – II darbininko darbo našumas,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ – abiejų darbininkų darbo našumas.

Tai visą darbą abu darbininkai kartu gali atlikti per $1:\frac{x+y}{xy}=\frac{xy}{x+y}$ dienų.

Pagal sąlygą

$$\begin{cases} x-\dfrac{xy}{x+y}=9, \\ y-\dfrac{xy}{x+y}=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+y}=9, & (1) \\ \dfrac{y^2}{x+y}=4; & (2) \end{cases}$$

(1) lygtį padalijęs iš (2) turime:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{9}{4}, \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \text{ ir } x=1{,}5y.$$

Įrašę x reikšmę į (2) lygtį gauname:

$$\frac{y^2}{1{,}5y+y}=4, \quad \frac{y}{2{,}5}=4. \text{ Todėl } y=10 \text{ ir } x=15.$$

Vadinasi, I darbininkas gali atlikti darbą per 15 dienų, o II-asis – per 10 dienų.

Kartais pasitaiko spręsti problemas, kurių siužetas atrodo visai nesusijęs su darbu. O sprendimui taikome šių uždavinių sprendimo metodus.

8 pavyzdys. Iš vietovių A ir B tuo pačiu keliu vienas priešais kitą pastoviais greičiais išvažiavo du motociklininkai. Motociklininkas iš A išvažiavo 8 valandą 35 minutės ir į B atvažiavo 13 valandą 11 minučių, o motociklininkas iš B išvažiavo 8 valandą 47 minutės ir į A atvažiavo 14 valandą 32 minutės. Kuriuo laiku motociklininkai prasilenkė kelyje?

Sprendimas. Motociklininko kelionė iš A į B truko 13 val. 11 min. – 8 val. 35 min = 4 h 36 min = $4\frac{3}{5}$ h, o motociklininko kelionė iš B į A truko 14 val. 32 min – 8 val. 47 min = 5 h 45 min = $5\frac{3}{4}$ h. Motociklininko iš A važiavimo spartumas $1:4\frac{3}{5}=\frac{5}{23}$, o motociklininko iš B - $1:5\frac{3}{4}=\frac{4}{23}$.

Motociklininkų vieno prie kito priartėjimo kelyje spartumas yra $\frac{5}{23}+\frac{4}{23}=\frac{9}{23}$.

Per 12 min = $\frac{1}{5}$ h (8 val. 47 min – 8 val. 35 min = 12 min), kol motociklininkas iš *B* nebuvo pradėjęs važiuoti, motociklininkas iš *A* nuvažiavo $\frac{5}{23}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{23}$ kelio, todėl kai pradėjo važiuoti motociklininkas iš *B*, atstumas tarp jų buvo $1-\frac{1}{23}=\frac{22}{23}$ kelio.

Vadinasi, po abiejų motociklininkų važiavimo kartu jie prasilenkė praėjus $\frac{22}{23}:\frac{9}{23}=\frac{22}{9}=2\frac{4}{9}$ (h). Tai įvyko 8 val. 47 min +2 h $26\frac{2}{3}$ min = 11 val. $13\frac{2}{3}$ min.

9 pavyzdys. Keletas vienodai sparčiai dirbančių žmonių gali nuravėti daržą per 30 minučių. Tačiau jie pradėjo darbą vienas po kito vienodais laiko tarpais, o baigė ravėti daržą kartu. Kiek laiko užtruko daržo ravėjimas, jeigu pirmasis žmogus, pradėjęs ravėjimą, dirbo *k* kartų ilgiau nei paskutinysis?

Sprendimas. Sakykime daržą ravėjo *a* žmonių, tai daržo ravėjimo apimtis 30*a* minučių. Tegul paskutinysis ravėjo daržą *x* minučių, tai pirmasis, pradėjęs daržo ravėjimą dirbo *kx* minučių. Beje, tiek ir užtruko viso daržo ravėjimas.

Kadangi žmonės pradėjo darbą vienas po kito vienodais laiko tarpais, tai visų jų ravėjimo laikai sudaro aritmetinę progresiją, kurios pirmasis narys atitinka pirmojo žmogaus laiką *kx* minučių, o šios p[progresijos narių skaičius yra *a* žmonių.

Pasinaudoję aritmetinės progresijos pirmųjų *n* narių sumos formule $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ turime:

$$\frac{kx+x}{2}\cdot a=30a \text{ arba } \frac{x(k+1)}{2}=30,\text{ t. y. } x=\frac{60}{k+1}.$$

Vadinasi, daržo ravėjimas truko $k\cdot\frac{60}{k+1}=\frac{60k}{k+1}$ minučių.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Namui suremontuoti buvo pasamdyti keli darbininkai, galintys tą darbą atlikti per tam tikrą dienų skaičių. Jei būtų pasamdyta 3 darbininkais mažiau, tai darbas truktų 6 dienomis ilgiau, o jei būtų pasamdyta 2 darbininkais daugiau, tai darbas būtų baigtas 2 dienomis anksčiau sutarto laiko. Kiek buvo pasamdyta darbininkų ir per kiek dienų buvo sutarta baigti namo remontą?

2. Rimas savo užduotį gali atlikti per 15 h, o Simo užduotį – per 25 h. Simas savo užduotį atlieka per 20 h. Per kiek laiko Simas gali padaryti Rimo užduotį?

3. Ritos mobilaus telefono baterijos įkrovos pakanka 4 valandoms pokalbių arba *x* ryšio laukimo valandoms. Kokia yra *x* reikšmė, jei žinoma, kad per užsitęsusį Ritos pokalbį visiškai įkrauta telefono baterija išsikrovė per 3 h $51\frac{1}{9}$ min?

4. Vandens bake yra du čiaupai: vienu čiaupu vanduo įteka į baką, o antru išteka iš bako. Jei atidarytume kartu abu čiaupus, tai tuščias bakas prisipildytų per 36 min. Kartą esant tuščiam bakui, buvo atidaryti abu čiaupai 6 minutėms, o po to čiaupas, kuriuo vanduo išteka, buvo uždarytas ir bakas prisipildė per 10 min. Per kiek minučių baką pripildytų pirmasis čiaupas, jei antrasis būtų uždarytas?

5. Dvi statybininkų brigados statė objektą. Po 5 bendro darbo dienų antroji brigada buvo pasiųsta į kitą aikštelę ir darbą baigė viena pirmoji brigada dar po 9 dienų. Per kiek dienų galėtų atlikti visą darbą kiekviena brigada, dirbdama atskirai, jei antrajai brigadai atlikti šį darbą reikia 12 dienų mažiau?

6. Iš vietovių A ir B vienu keliu vienas priešais kitą pastoviais greičiais išvažiavo du dviratininkai. Pirmasis iš A išvažiavo 8 val. 24 min ir į B atvyko 12 val. 36 min, o antrasis iš B išvažiavo 8 val. 36 min ir į A atvyko 13 val. 51 min. Kuriuo laiku dviratininkai kelyje prasilenkė?

7. (Levo Tolstojaus uždavinys.) Į lauką išvyko šienpjovių artėlė. Čia ji turėjo nupjauti dvi pievas, kurių viena buvo dvigubai didesnė už kitą. Pusę dienos artėlė pjovė didesniąją pievą, o antrą dienos pusę ji susiskirstė į dvi lygias grupes, kurių viena turėjo baigti šienauti didesniąją pievą, o antroji ėmė pjauti mažesniąją. Iki vakaro didesnioji buvo nupjauta, o mažesniosios pievos liko sklypas, kurį kitą dieną nupjovė vienas šienpjovys, dirbdamas ištisą dieną. Kiek šienpjovių buvo artėlėje?

8. Penki vienodo galingumo ekskavatoriai, dirbdami kartu, gali iškasti duobę per 24 valandas. Tačiau jie pradėjo dirbti vienas po kito vienodais laiko tarpais, o duobę baigė kasti kartu. Kiek laiko dirbo kiekvienas ekskavatorininkas, jei pirmasis, pradėjęs darbą, dirbo 3 kartus ilgiau, negu paskutinysis įsijungęs į darbą?

9. Petras, dirbdamas vienas, visą darbą atliktų per m valandų. Jonas, dirbdamas vienas, šį darbą atliktų per n valandų. Dirbdami abu, jie dvigubai didesnės apimties darbą atliktų per T valandų. Įsitikinkite, kad T yra skaičių m ir n harmoninis vidurkis.

10. **(**Vienas iš keturių uždavinių, pateiktas 1932 metais Kauno jėzuitų humanitarinėje gimnazijoje per abitūros egzaminus.) Vienam staliui buvo užmokėta 48 Lt, kitam, kuris dirbo 6 val. mažiau, – 27 Lt. Jei pirmasis stalius būtų dirbęs tiek valandų kiek antrasis, antrasis tiek kiek pirmasis, tai būtų uždirbę po lygiai. Po kiek valandų dirbo staliai?

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2020 m. gruodžio 22 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA