SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA

Marijampolė, 2019-12-06

1.Pas Mokytoją Alvydą Beinakaraitį ateidavo daugybė pasimetusių žmonių, kurie kone verkdami guosdavosi Jam, kad matematikos mokslų suvokimo žvaigždutė yra nuo jų galutinai nusigręžusi. Besistengdamas, kad jie galutinai nepalūžtų, Mokytojas Alvydas jiems visiems labai kantriai (bet su šypsena) aiškindavo, kad matematinės sėkmės žvaigždutės gręžiojimosi trajektorija neretai (kaip metų laikai) kinta **cikliškai**. Tai dažniausiai reiškia, kad jeigu pernai žvaigždutė buvo nuo jūsų nusigręžusi, tai kitąmet ji, žiūrėk, gali vėl į jus atsigręžti, jei tik jūs laisvalaikiu pasprendinėtumėte kokių nors uždavinukų.
Ir jis dažnai siūlydavo jiems tokį atgaivos uždavinį, kuriame reikia surasti tokį patį didžiausią skaičių, kurio visi skaitmenys būtų skirtingi, o sudauginus juos gautųsi 360. Kaip uždavinio atsakymą Mokytojas Alvydas net neprašydavo užrašyti to paties didžiausiojo tokio skaičiaus, o tik kukliai paminėti jo skaitmenų sumą.
Jums nelengva net įsivaizduoti, kokiai daugybei žmonių su šiuo uždaviniu Mokytojas Beinakaraitis grąžino ne tik norą gyventi, bet ir siekimą dar ką nors suvokti.
Tai kokia gi yra tokio paties didžiausio įmanomo skaičiaus su visais skirtingais skaitmenimis ir kurio visų skaitmenų sandauga yra 360 skaitmenų suma?

2. Mokytoja Daiva šypsosi ir sako, kad tikras suvalkietis turi gebėti prireikus per 5 minutes atsakyti į klausimą, kiek daugiausiai skirtingų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, galima būtų paimti, kad dar nebūtų jokios absoliučios garantijos, kad tų jau atrinktųjų skaičių sandauga jau dalijasi iš 250.
Šypsosi ir direktorius Vilhelmas, nes jis tiki, kad Rygiškių Jono gimnazijoje tokių gimnazistų skaičius viršija visas įmanomas ribas (ir yra kone triženklis).
Taigi kiek daugiausiai skirtingų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, galima paimti, kad dar nebūtų garantijos, kad tų paimtųjų skaičių sandauga dalijasi iš 250?

3. Mokytojas Alvydas Beinakaraitis laisvalaikiu (kurio neaišku, ar turi) kažkaip pasistatė sodo namelį, kuriame įsirengė erdvoką 6 m × 6 m kvadratinį vonios kambarėlį, kurio vienas kampas buvo ištisai užimtas 1,5 m × 2 m stačiakampio formos dušine. Koks yra pačios didžiausios apskritimo formos kilimėlio, kurį būtų įmanoma visą ištisai patiesti toje likusioje laisvoje vonios kambarėlio dalyje, spindulys (skaičiuojant metrais)?

4. Vienas Vilkaviškio mokytojas Vilius Kaviškis kartą pasakė, kad žmogus, kuris per pusvalandį gali surasti kokį nors vieną lygčių sistemos

$$\begin{cases} xy^3 = -135 \\ (x+y)y = -6 \end{cases}$$

sprendinį, yra, atvirai kalbant, gana gabus. O jeigu pasitaikytų toks, kuris pajėgtų rasti visus tos lygčių sistemos sprendinius realiaisiais skaičiais $(x; y)$, tai toks jau būtų žiauriai gabokas.
Tad, nesvarbu, sirpsta ar nesirpsta gruody vyšnios Suvalkijoj, į darbą, broliai, rikiuokite lygtį prie lygties ir:
(A) Nurodykite kokį nors vieną tos lygčių sistemos sprendinį $(x; y)$;
(B) Suraskite visus tos lygčių sistemos sprendinius.

5. Dvi tikros mokytojo Alvydo Beinakaraičio mokinės – Ieva ir Emilija – su didžiuliu entuziazmu miklina protą žaisdamos tokį žaidimą, kurio taisykles mes pateikiame žemiau.
Ant stalo yra 42 kriauklelės. Savo ėjimais merginos pakaitomis (pradeda Ieva) nušlavinėja tas kriaukleles nuo stalo. Kiekvienu ėjimu privalu nušluoti bent vieną, bet ne daugiau kaip pusę ant stalo dar tebesančių kriauklelių. Laimėjusia yra laikoma ta mergina, po kurios ėjimo ant stalo lieka viena vienintelė kriauklelė.
Ar gali kuri nors iš jų – Ieva arba Emilija – nušlavinėti kriaukleles nuo stalo taip, kad ji visada laimėtų, kad ir ką bedarytų jos varžovė?
Ir kaip jai tada reikėtų žaisti?

SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA

Marijampolė, 2019-12-06
Sąlygos su sprendimais

1.Pas Mokytoją Alvydą Beinakaraitį ateidavo daugybė pasimetusių žmonių, kurie kone verkdami guosdavosi Jam, kad matematikos mokslų suvokimo žvaigždutė yra nuo jų galutinai nusigręžusi. Besistengdamas, kad jie galutinai nepalūžtų, Mokytojas Alvydas jiems visiems labai kantriai (bet su šypsena) aiškindavo, kad matematinės sėkmės žvaigždutės gręžiojimosi trajektorija neretai (kaip metų laikai) kinta **cikliškai**. Tai dažniausiai reiškia, kad jeigu pernai žvaigždutė buvo nuo jūsų nusigręžusi, tai kitąmet ji, žiūrėk, gali vėl į jus atsigręžti, jei tik jūs laisvalaikiu pasprendinėtumėte kokių nors uždavinukų.
Ir jis dažnai siūlydavo jiems tokį atgaivos uždavinį, kuriame reikia surasti tokį patį didžiausią skaičių, kurio visi skaitmenys būtų skirtingi, o sudauginus juos gautųsi 360. Kaip uždavinio atsakymą Mokytojas Alvydas net neprašydavo užrašyti to paties didžiausiojo tokio skaičiaus, o tik kukliai paminėti jo skaitmenų sumą.
Jums nelengva net įsivaizduoti, kokiai daugybei žmonių su šiuo uždaviniu Mokytojas Beinakaraitis grąžino ne tik norą gyventi, bet siekimą dar ką nors suvokti.
Tai kokia gi yra tokio paties didžiausio įmanomo skaičiaus su visais skirtingais skaitmenimis ir kurio visų skaitmenų sandauga yra 360 skaitmenų suma?

Sprendimas
Kadangi
$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5,$$
tai tas pats didžiausias skaičius su visai skirtingais skaitmenimis yra
$$95421,$$
o jo skaitmenų suma yra
$$9 + 5 + 4 + 2 + 1 = 21.$$

Atsakymas
Paties didžiausiojo skaičiaus, kurio visi skaitmenys yra skirtingi, o jo skaitmenų sandauga yra 360, skaitmenų suma yra 21.

2. Mokytoja Daiva šypsosi ir sako, kad tikras suvalkietis turi gebėti prireikus per 5 minutes atsakyti į klausimą, kiek daugiausiai skirtingų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, galima būtų paimti, kad dar nebūtų jokios absoliučios garantijos, kad tų jau atrinktųjų skaičių sandauga jau dalijasi iš 250.
Šypsosi ir direktorius Vilhelmas, nes jis tiki, kad Rygiškių Jono gimnazijoje tokių gimnazistų skaičius viršija visas įmanomas ribas (ir yra kone triženklis).
Taigi kiek daugiausiai skirtingų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, galima paimti, kad dar nebūtų garantijos, kad tų paimtųjų skaičių sandauga dalijasi iš 250?

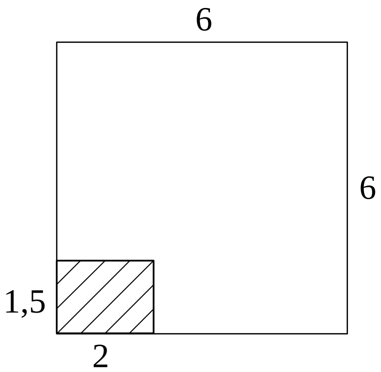
Sprendimas
Pirmiausiai pastebėkite, kad
$$250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^3,$$
Todėl jeigu sandauga nesidalija iš 250, tai tarp pasirinktųjų skaičių yra daugiausiai du tik iš 5-ių besidalijantys skaičiai arba nėra nė vieno lyginio skaičiaus. Jei neimtume nė vieno lyginio skaičiaus, tai turėtume tikrai ne daugiau kaip 500 skaičių. Tarp skaičių nuo 1 iki 999 yra 199 iš 5-ių besidalijantys skaičiai, vadinasi, likusieji 999 – 199 = 800 skaičių nesidalija iš 5. Todėl juos visus paėmus ir sudauginus gautoji sandauga nesidalins net

iš 5 (nors jau tikrai dalinsis iš 2). Toliau jei paimsime tik dar du kitus skaičius, arba iš viso jau 802, tai gautoji sandauga jau dalinsis iš 25, o paėmus dar vieną, jau 803-čią skaičių, gautoji sandauga jau dalinsis iš 250.
Todėl atsakymas yra toks, kad galėjo būti sudauginta daugiausiai 802 skaičiai.

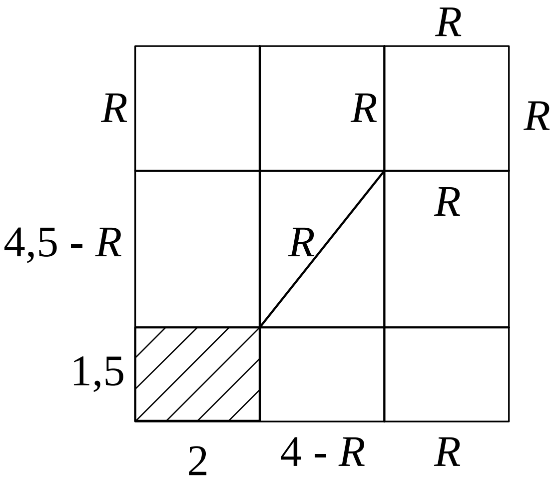
Atsakymas
Galėjo būti sudauginti daugiausiai 802 skaičiai.

3. Mokytojas Alvydas Beinakaraitis laisvalaikiu (kurio neaišku, ar turi) kažkaip pasistatė sodo namelį, kuriame įsirengė erdvoką 6 m × 6 m kvadratinį vonios kambarėlį, kurio vienas kampas buvo ištisai užimtas 1,5 m × 2 m stačiakampio formos dušine. Koks yra pačios didžiausios apskritimo formos kilimėlio, kurį būtų įmanoma visą ištisai patiesti toje likusioje laisvoje vonios kambarėlio dalyje, spindulys (skaičiuojant metrais)?

Sprendimas
Pirmiausiai pasidarykime pradinį brėžinį. Jame matome vieną didesnį stačiakampį (kuris „po teisybei" yra kvadratas) ir kurio kairįjį apatinį kampą užima mažesnis stačiakampiukas.



Uždavinys prašo į likusią (neužbrūkšniuotą) kvadrato dalį įbrėžti kuo didesnį apskritimą, kuriam priklausytų didesniojo stačiakampio viduje esanti mažesniojo stačiakampio viršūnė ir kuris dar liestų abi priešingas didžiojo stačiakampio kraštines.
Uždavinys susiveda į lygiagrečiai didžiojo stačiakampio kraštinėms įdėtą tokį stačiakampį, kurio įstrižainė yra lygi į priešingą kvadrato kampą (taip pat lygiagrečiai pradinio kvadrato kraštinėms) įdėto mažesniojo kvadrato kraštinei – žiūrėkite kitą, jau antrąjį brėžinį.



Belieka užrašyti jau minėtą sąlygą, kad centre esančio stačiakampio įstrižainė, kuri, remiantis Pitagoro teorema, yra

$$\sqrt{(4-R)^2+(4{,}5-R)^2},$$

būtų lygi kitame kampe esančio kvadrato kraštinei, kuri yra lygi

$$R.$$

Taip gauname lygybę

$$\sqrt{(4-R)^2+(4{,}5-R)^2}=R.$$

Keldami kvadratu gautume

$$(4-R)^2+(4{,}5-R)^2=R^2.$$

Sutvarkius gautume kvadratinę lygtį

$$R^2-17R+36{,}25=0,$$

turinčią dvi šaknis

$$R_1=2{,}5$$

ir

$$R_1=14{,}5.$$

Antroji šaknis mums akivaizdžiai netinka ir lieka atsakymas, kad pačios didžiausios apskritimo formos kilimėlis, kuris telpa į pradinį kvadratą ir nekerta mažojo stačiakampio vidaus, turi spindulį, kuris yra 2,5.

Atsakymas.
Pačios didžiausios formos apskritas kilimėlis, telpantis į didįjį stačiakampį (kuris yra kvadratas) ir nekertantis mažesniojo stačiakampio vidaus, turi 2,5 lygų spindulį.

4. Vienas Vilkaviškio mokytojas Vilius Kaviškis kartą pasakė, kad žmogus, kuris per pusvalandį gali surasti kokį nors vieną lygčių sistemos

$$\begin{cases} xy^3=-135 \\ (x+y)y=-6 \end{cases}$$

sprendinį, yra, atvirai kalbant, gana gabus. O jeigu pasitaikytų toks, kuris pajėgtų rasti visus tos lygčių sistemos sprendinius realiaisiais skaičiais (x; y), tai toks jau būtų žiauriai gabokas.
Tad, nesvarbu, sirpsta ar nesirpsta gruody vyšnios Suvalkijoj, į darbą, broliai, rikiuokite lygtį prie lygties ir:
(A) Nurodykite kokį nors vieną tos lygčių sistemos sprendinį (x; y);
(B) Suraskite visus tos lygčių sistemos sprendinius.

Sprendimas
Iš pirmosios sistemos lygties matome, kad nei x, nei y tikrai nėra lygus nuliui. Jei antrąją lygtį padaugintume iš

$$y^2$$

ir iš jos atimtume antrąją lygtį, tai gautume

$$y^4=-6y^2+135,$$

arba

$$y^4+6y^2-135=0.$$

Pažymėję

$$y^2=t\geq 0$$

gauname kvadratinę lygtį,

$$t^2+6t-135=0,$$

kurios šaknys akivaizdžiai yra

$$t_1=9$$

ir

$$t_1=-15.$$

Antroji t reikšmė mums netinka, nes ji yra neigiama, ir todėl lieka tik pirmoji reikšmė 9, iš kurios ir gauname, kad

$$y=\pm 3.$$

Galiausiai iš antrosios lygties turime, kad

$$x=\mp 5.$$

Todėl mūsų sistema turi du sprendinius, kurie yra (-5;3) ir (5;-3).
Atsakymas
(-5;3) ir (5;-3).

5. Dvi tikros mokytojo Alvydo Beinakaraičio mokinės – Ieva ir Emilija – su didžiuliu entuziazmu miklina protą žaisdamos tokį žaidimą, kurio taisykles mes pateikiame žemiau.
Ant stalo yra 42 kriauklelės. Savo ėjimais merginos pakaitomis (pradeda Ieva) nušlavinėja tas kriaukleles nuo stalo. Kiekvienu ėjimu privalu nušluoti bent vieną, bet ne daugiau kaip pusę ant stalo dar tebesančių kriauklelių. Laimėjusia yra laikoma ta mergina, po kurios ėjimo ant stalo lieka viena vienintelė kriauklelė.
Ar gali kuri nors iš jų – Ieva arba Emilija – nušlavinėti kriaukleles nuo stalo taip, kad ji visada laimėtų, kad ir ką bedarytų jos varžovė?
Ir kaip jai tada reikėtų žaisti?

Sprendimas
Jeigu savo kuriuo nors ėjimu Ieva sugebėtų palikti Emilijai 3 kriaukleles, tai tada savo ėjimu Emilija tegalėtų paimti tik vieną kriauklelę, nes jai kitaip neišeitų – nes bent vieną nušluoti ji privalo, o daugiau kaip 1 nušluoti ji negali, nes tai jau būtų daugiau negu pusė. Taigi Emilija turi nušluoti vieną kriauklelę palikdama Ievai ant stalo 2 kriaukleles. Tada ir Ieva nušluoja 1-ą kriauklelę ir taip ant stalo lieka 1 kriauklelė – o tada Ieva laimi.
Vadinasi, jei Ieva sugebėtų palikti Emilijai 3 kriaukleles, tai tada ji tikrai laimėtų. Toliau pastebėkime, kad ji laimėtų, jeigu sugebėtų po savo šlavimo palikti Emilijai 7 kriaukleles. Tikrai, jeigu ji gali palikti Emilijai 7 kriaukleles, tai tada savo ėjimu Emilija gali nušluoti 1, 2 arba 3
kriaukleles. Tada Ieva nušluodama atitinkamai 3, 2 arba 1 kriauklelę paliks Emilijai 3 kriaukleles, o tada, kaip jau žinoma, Ieva laimi.
Panašiai galime įsitikinti, kad Ieva laimėtų galėdama po savo šlavimo palikti Emilijai ant stalo 15 kriauklelių, nes tada Emilija, savo ruožtu, gali nušluoti nuo 1 iki 7 kriauklelių, o Ieva šluoja taip, kad jos „per abi“ nušluotų 8 kriaukleles, arba Ieva nušlavinėtų atitinkamai nuo 7 iki 1 kriauklelės.
Galiausiai visiškai panašiai suvokiame, kad Ieva laimėtų galėdama palikti Emilijai ant stalo 31 kriauklelę, nes tada Emilija gali nušluoti nuo 1 iki 15 kriauklelių, kaip šluotų ir Ieva, taikydama šluoti taip, kad dabar jos „per abi“ nubrauktų nuo stalo jau 16 kriauklelių.
O 31 kriauklelę, kai jų ant stalo yra 42, Ieva gali palikti Emilijai, nubraukdama nuo stalo 11 kriauklelių.
Todėl Ieva laimi žaisdama taip, kad pirmuoju ėjimu ji nušluoja nuo stalo 11 kriauklelių, palikdama ant stalo 31 kriauklelę, toliau savo antruoju ėjimu Ieva, derindamasi prie Emilijos, nušluoja tiek kriauklelių, kad jų ant stalo liktų 15, dar toliau – kad jų liktų 7, dar toliau – kad 3, o tada paskutiniu ėjimu ji palieka ant stalo 1 kriauklelę, o tai reiškia, kad Ieva laimi.

Atsakymas.
Ieva gali laimėti, nežiūrint ko besigriebtų Emilija.