Rietavo XVIII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2019 11 08

9 – 10 klasės

Sprendimai

---

1 uždavinys. Išspręskite lygtį

$$1-\frac{x-\frac{1+3x}{5}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-6x}{7}}{2}.$$

Sprendimas. Pertvarkome lygties kairiąją ir dešinę puses:

$$\begin{aligned}1-\frac{x-\frac{1+3x}{5}}{3}&=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-6x}{7}}{2}\\ \frac{3-x+\frac{1+3x}{5}}{3}&=\frac{x-2x+\frac{10-6x}{7}}{2}\\ \frac{15-5x+1+3x}{15}&=\frac{-7x+10-6x}{14}\\ \frac{16-2x}{15}&=\frac{10-13x}{14}\end{aligned}$$

Iš čia gauname, kad

$$\begin{aligned}14\cdot(16-2x)&=15\cdot(10-13x)\\ 224-28x&=150-195x\\ x&=-\frac{74}{167}.\end{aligned}$$

◀

2 uždavinys. Raskite lygties $x^2+|x+3|+|x-3|-24=0$ sprendinius.

Sprendimas. Atskirai nagrinėkime atvejus: kai $x<-3$, kai $-3\leqslant x<3$, ir kai $x\geqslant 3$.

Tarkime, kad $x<-3$. Tuomet sprendžiame lygtį $x^2-x-3-x+3-24=x^2-2x-24=0$, kurios sprendiniai yra 6 ir -4. Sprendinys 6 netinka, nes yra didesnis už -3.

Tarkime, kad $-3\leqslant x<3$. Tuomet sprendžiame lygtį $x^2+x+3+3-x-24=x^2-18=0$, kurios sprendiniai yra $\pm3\sqrt{2}$. Nė vienas iš šių sprendinių nepatenka į reikiamą intervalą.

Tarkime, kad $x\geqslant 3$. Tuomet sprendžiame lygtį $x^2+x+3+x-3-24=x^2+2x-24=0$, kurios sprendiniai yra -6 ir 4. Sprendinys -6 netinka, nes yra mažesnis už 3.

Taigi, lygtis turi du sprendinius 4 ir -4. Patikrinkime, ar jie tinka:

$$(-4)^2+|-4+3|+|-4-3|-24=16+1+7-24=0$$

ir

$$4^2+|4+3|+|4-3|-24=16+7+1-24=0.$$

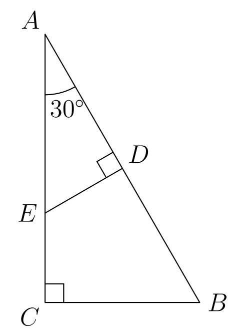
◀

3 uždavinys. Ūkyje iš gyvulių laikomi tik arkliai, ožkos ir karvės. Arklių yra 13%. Ožkų yra aštuonis kartus daugiau negu karvių. Kiek mažiausiai gyvulių gali būti ūkyje?

Sprendimas. Tarkime ūkyje yra n gyvulių. Tuomet arklių yra $\frac{13n}{100}$. Kadangi arklių skaičius turi būti natūralusis skaičius, tai n dalijasi iš 100. Karvių skaičių pažymėkime raidę m. Tuomet ožkų yra $8m$. Karvės ir ožkos sudaro 87% visų gyvulių, todėl $\frac{87n}{100} = m + 8m = 9m$. Iš čia seka, kad $87n$ dalijasi iš 9, vadinasi, n dalijasi iš 3. Mažiausias natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš 100 ir iš 3 yra 300. Patikrinkime, ar šis skaičius tikrai tinka: arklių yra $\frac{13 \cdot 300}{100} = 39$, karvių ir ožkų yra $\frac{87 \cdot 300}{100} = 261$, tuomet karvių yra $261 : 9 = 29$, o ožkų $29 \cdot 8 = 232$.

◀

4 uždavinys. Duotas statusis trikampis ABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, taškas D yra įžambinės AB vidurio taškas, atkarpa DE statmena įžambinei AB, o $AE = 4$ cm. Raskite statmens BC ilgį.



Sprendimas. Trikampio ADE statinis DE yra prieš 30° kampą, todėl lygus pusei įžambinės AE, t. y. 2 cm. Tuomet $AD = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm. Taškas D yra kraštinės AB vidurio taškas, todėl $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Trikampio ABC statinis BC yra prieš 30° kampą, todėl lygus pusei įžambinės AB, t. y. $2\sqrt{3}$ cm ◀

5 uždavinys. Trikampio kraštinių ilgiai a, b ir c yra natūralieji skaičiai ir tenkina nelygybes $a < b < c$. Kiek yra tokių trikampių, jei $b = 3$?

Sprendimas. Kadangi $a < b = 3$, tai arba $a = 1$, arba $a = 2$. Jei $a = 1$, tuomet pagal trikampio nelygybę $c < a + b = 4$. Bet taip būti negali, nes $c > b = 3$.

Jei $a = 2$, tai $3 = b < c < a + b = 5$. Vadinasi, $c = 4$. Uždavinio sąlygas tenkina vienintelis trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 2, 3 ir 4. ◀

6 uždavinys. Stačiojo trikampio vienas statinis lygus 11, o kitų kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai. Koks gali būti mažiausias šio trikampio perimetras?

Sprendimas. Pažymėkime nežinomų trikampio kraštinių ilgius atitinkamai a ir b. Tuomet pagal Pitagoro teoremą $a^2 + 11^2 = b^2$. Perkėlę a į kitą pusę ir išskaidę, gauname lygtį $121 = (b-a)(b+a)$. Skaičius 121 turi tik 3 natūraliuosius daliklius: 1, 11 ir 121. Kadangi $b - a < b + a$, tai $b - a = 1$ arba $b - a = 11$.

Jei $b - a = 1$, tai $b + a = 121$. Išsprendę lygčių sistemą gauname, kad $a = 60, b = 61$.

Jei $b - a = 11$, tai $b + a$ irgi lygu 11, bet taip būti negali, nes $b - a < b + a$. Taigi gavome vienintelį uždavinio sąlygas tenkinantį trikampį, kurio perimetras yra $11 + 61 + 60 = 132$.

◀

7 uždavinys. Trikampiuose PQR ir STU $\angle P = 2 \times \angle S$, $\angle R = 2 \times \angle U$ ir $\angle Q = \frac{1}{5} \times \angle T$. Kam lygus $\angle T$?

Sprendimas. Sudėję visas tris lygybes gauname $\angle P + \angle R + \angle Q = 2 \times \angle S + 2 \times \angle U + \frac{1}{5} \times \angle T$. Kadangi trikampio kampų suma lygi $180°$, tai

$$\begin{aligned} 180° &= 2 \times \angle S + 2 \times \angle U + \frac{1}{5} \times \angle T \\ &= 2 \times (\angle S + \angle U + \angle T) - 2 \times \angle T + \frac{1}{5}\angle T \\ &= 360° - \frac{9}{5}\angle T. \end{aligned}$$

Taigi $180° = \frac{9}{5}\angle T$, $\angle T = 100°$. ◀

8 uždavinys. Stalčiuje yra 10 vienodų geltonų kojinių, 8 vienodos mėlynos kojinės ir 4 vienodos rožinės kojinės. Andrius iš stalčiaus nežiūrėdamas ima po vieną kojinę. Kiek mažiausiai kojinių jis turi ištraukti, kad tikrai turėtų bent 2 poras? (Dvi kojinės sudaro porą, jei jos yra tos pačios spalvos.)

Sprendimas. Stalčiuje yra trijų spalvų kojinės, taigi, ištraukęs 3 kojines Andrius, nesėkmės atveju, turės tris skirtingas kojines. Ketvirtuoju traukimu ištrauks vieną iš turimų spalvų ir turės vieną porą. Penktuoju traukimu gali ištraukti tos spalvos kojinę, kurios jau viena pora susidarė ir vėl turės visų trijų spalvų vienišas kojines. Kokią kojinę beištrauktų šeštuoju traukimu, ji sudarys porą su viena iš turimų kojinių. Taigi Andriui reikia ištraukti bent 6 kojines. ◀

9 uždavinys. Du penkiaženkliai skaičiai sudaryti iš 10 skirtingų skaitmenų. Koks gali būti didžiausias šių skaičių skirtumas?

Sprendimas. Skirtumas bus didžiausias, kai didesnysis skaičius bus kuo didesnis, o mažesnysis – kuo mažesnis. Didžiausias penkiaženklis skaičius iš skirtingų skaitmenų yra 98765. Mažiausias penkiaženklis skaičius iš skirtingų skaitmenų yra 10234. Užrašant šiuos skaičius panaudojami visi 10 skirtingų skaitmenų, o šių skaičių skirtumas yra $98765 - 10234 = 88531$. ◀

10 uždavinys. Jonas Rietaviškis ir Motiejus Varniškis stumdo figūrėlę ant 20 langelių ilgio juostos. Pradžioje Motiejus pasirenka langelį ir padeda ten figūrėlę. Kiekvienu ėjimu Jonas pasako natūralųjį skaičių iš intervalo $[1, 11]$, o Motiejus pastumia figūrėlę per pasakytą skaičių langelių į dešinę arba į kairę, bet negali išeiti iš juostos ribų. Jonas laimi, kai Motiejus negali padaryti ėjimo. Įrodykite, kad Jonas gali taip parinkti skaičius, kad laimėtų po baigtinio skaičiaus ėjimų.

Sprendimas. Sunumeruokime juostos langelius nuo 1 iki 20 iš kairės į dešinę. Jonas laimės, kai figūrėlė stovės 10-tame arba 11-tame langelyje ir Jonas pasakys skaičių 11. Tuomet Motiejui neužteks langelių nei į kairę, nei į dešinę. Taigi, Jono tikslas yra įvaryti figūrėlę į 10-tą arba 11-tą langelį. Taip Jonas gali padaryti pasirinkęs tokią strategiją. Nemažindami bendrumo galime teigti, kad pradžioje Motiejus figūrėlę pastato į k-tajį langelį ir $k \leqslant 10$ (jei Motiejus pastatytų figūrėlę į dešiniąją juostos pusę, galėtume juostą apsukti). Tuomet Jonas pasako skaičių $10-k$. Jei Motiejus paeina į dešinę, figūrėlė atsiduria 10 langelyje ir Motiejus pralaimi. Jei Motiejus paeina į kairę, figūrėlė atsiduria langelyje $k' \leqslant k$. Tuomet Jonas pasako skaičių $10 - k'$ ir t. t. Kadangi juosta baigtinė, tai kažkuriuo ėjimu Motiejus nebegalės paeiti į kairę, todėl eis į dešinę ir atsidurs 10 langelyje, kur jo jau laukia pralaimėjimas. ◀

Pastaba. Jonas gali žaisti ir paprasčiau: paeiliui sakyti skaičius 11, 10, 11, 10, 11, 10,…. Įsitikinkite, kad taip žaisdamas Jonas visada laimėtų.

Rietavo XVIII komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

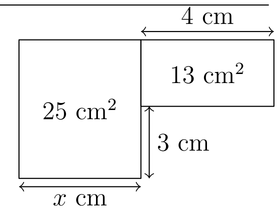
2019 11 08

11 – 12 klasės

Sprendimai

---

1 uždavinys. Dviejų stačiakampių plotas yra 25 cm^2 ir 13 cm^2 (žr. brėžinį dešinėje). Kokia yra x reikšmė?



Sprendimas. Stačiakampį, kurio plotas yra 25 cm^2 pažymėkime raide A, o stačiakampį, kurio plotas yra 13 cm^2 – raide B. Žinome, kad stačiakampio B viena kraštinė yra lygi 4 cm. Vadinasi, kita kraštinė yra lygi $\frac{13}{4}$ cm. Tuomet stačiakampio A viena kraštinė yra $\frac{13}{4}+3=\frac{25}{4}$ cm, o ieškomoji kraštinė $x = 25\cdot\frac{4}{25} = 4$ cm. ◀

2 uždavinys. Žinome, kad lygtys

$$3\left(x-2\left(x+\frac{a}{3}\right)\right)=2x \quad \text{ir} \quad \frac{3x+a}{3}-\frac{1+4x}{6}=0,$$

kurių parametras yra a, turi bendrą sprendinį. Raskite jį.

Sprendimas. Išspręskime pirmąją lygtį

$$3\left(x-2\left(x+\frac{a}{3}\right)\right)=2x \quad\Rightarrow\quad -3x-2a=2x \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{2}{5}a.$$

Iš antrosios lygties gauname

$$\frac{3x+a}{3}-\frac{1+4x}{6}=\frac{6x+2a-1-4x}{6}=\frac{2x+2a-1}{6}=0 \quad\Rightarrow\quad x=-a+\frac{1}{2}.$$

Kadangi lygtys turi bendrą sprendinį, tai $-\frac{2}{5}a=-a+\frac{1}{2}$, vadinasi, $\frac{3}{5}a=\frac{1}{2}$ ir $a=\frac{5}{6}$. Tuomet $x=-\frac{1}{3}$. ◀

3 uždavinys. Duota, kad $c>1$,

$$x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}, \quad y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}.$$

Kuris iš skaičių x ir y yra didesnis?

Sprendimas. Panaikinkime iracionalumą vardikliuose:

$$x = \frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}} = (\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1})(\sqrt{c}+\sqrt{c-1}),$$
$$y = \frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}} = (\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1})(\sqrt{c+1}+\sqrt{c}).$$

Tuomet $y - x = (\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1})(\sqrt{c+1}+\sqrt{c}) - (\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1})(\sqrt{c}+\sqrt{c-1}) =$
$= (\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1})(\sqrt{c+1}+\sqrt{c}-\sqrt{c}-\sqrt{c-1}) = (\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1})(\sqrt{c+1}-\sqrt{c-1}) > 0.$
Taigi $x < y$. ◀

4 uždavinys. Stačiojo trikampio vienas statinis lygus 21, o kitų kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai. Koks gali būti mažiausias šio trikampio perimetras?

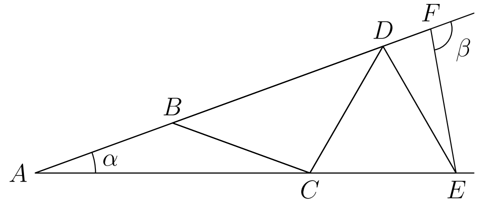
Sprendimas. Pažymėkime nežinomų trikampio kraštinių ilgius atitinkamai a ir b. Trikampio perimetras bus mažiausias, kai suma $a+b$ bus mažiausia. Pagal Pitagoro teoremą $a^2 + 21^2 = b^2$. Perkėlę a į kitą pusę ir išskaidę, gauname lygtį $21^2 = (b-a)(b+a)$. Kadangi $b - a < b + a$, tai $b + a > 21$. Mažiausias skaičiaus 21^2 daliklis, didesnis už 21, yra 49. Tuomet mažiausias trikampio perimetras yra $21 + a + b = 21 + 49 = 70$. Patikrinkime ar toks trikampis, tikrai egzistuoja. Jei $a + b = 49$, tuomet $b - a = 21^2 : 49 = 9$. Vadinasi, $b = 29$, o $a = 20$. Taigi, ieškomo trikampio kraštinės yra 20, 21 ir 29, o uždavinio atsakymas yra 70. ◀

5 uždavinys. Lentelėje įrašyti tokie realieji skaičiai skaičiai a, b, c, d, e ir f, kad kiekvienos eilutės trijų skaičių suma, kiekvieno stulpelio trijų skaičių suma ir kiekvienos įstrižainės trijų skaičių suma yra lygios. Kam lygu $a+b+c+d+e+f$?

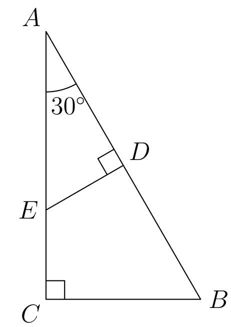
a	b	6
c	d	e
f	7	2

Sprendimas. Pažymėkime eilutės trijų skaičių sumą raide S. Tuomet $f = S - 9$, $e = S - 8$, $d = S-6-f = S-6-(S-9) = 3$, $c = S-d-e = S-3-(S-8) = 5$, $a = S-c-f = S-5-(S-9) = 4$. Tuomet $S = a+d+2 = 4+3+2 = 9$. Taigi, $a+b+c+d+e+f = 3S-6-7-2 = 27-15 = 12$. ◀

6 uždavinys. Žinome, kad $AB = BC = CD = DE = EF$, o $\beta = 100°$. Raskite kampo α dydį laipsniais.



Sprendimas. Trikampis ABC yra lygiašonis, todėl $\angle BCA = \alpha$. Pagal priekampio teoremą $\angle DBC = 2\alpha$. Trikampis BCD irgi yra lygiašonis, todėl $\angle BDC = \angle DBC = 2\alpha$. Tuomet $\angle DCE = 180° - \angle BCD - \angle BCA = 180° - (180° - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$. Tada $\angle CDE = 180° - 6\alpha$. Iš kitos pusės žinome, kad $\angle FDE = \angle DFE = 180° - 100° = 80°$. Taigi, $180° = \angle BDC + \angle CDE + 80° = 2\alpha + 180° - 6\alpha + 80° = 260° - 4\alpha$. Iš čia gauname, kad $4\alpha = 80°$, $\alpha = 20°$. ◀



7 uždavinys. Duotas statusis trikampis ABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, taškas D yra įžambinės AB vidurio taškas, atkarpa DE statmena įžambinei AB, o $AE = 4$ cm. Raskite statmens BC ilgį.

Sprendimas. Trikampio ADE statinis DE yra prieš 30° kampą, todėl lygus pusei įžambinės AE, t. y. 2 cm. Tuomet $AD = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm. Taškas D yra kraštinės AB vidurio taškas, todėl $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Trikampio ABC statinis BC yra prieš 30° kampą, todėl lygus pusei įžambinės AB, t. y. $2\sqrt{3}$ cm ◄

8 uždavinys. Krepšyje yra 5 spalvų vienodo dydžio kamuoliukai. Kiekvienos spalvos kamuoliukų yra po 55. Kiek mažiausiai kamuoliukų reikia ištraukti, kad tikrai turėtume bent penkias grupeles po 5 vienos spalvos kamuoliukus?

Sprendimas. Pabandykime suprasti, kiek mažiausiai reikia ištraukti kamuoliukų, kad turėtume vieną vienspalvę grupelę. Ištraukę kiekvienos spalvos po 4 kamuoliukus tokios grupelės neturėsime (t. y. ištraukus 20 kamuoliukų dar galime neturėti nė vienos tokios grupelės), bet ištraukę dar vieną, 21-ąjį, kamuoliuką, jau tikrai turėsim kažkurios spalvos 5 kamuoliukus.
Dabar panašiai samprotaukime galvodami apie 5 grupeles iš 5 rutuliukų. Jei traukėme kamuoliukus tol, kol kažkuriuo metu susidarė 4 grupelės iš 5 rutuliukų (nesvarbu, kurios spalvos, galime atidėti juos į šalį) ir dar po 4 nesugrupuotus kiekvienos spalvos rutuliukus, tai būsim ištraukę $4\cdot5+5\cdot4 = 40$ kamuoliukų ir penktos grupelės neturėsime, bet ištraukus dar vieną, 41-ąjį kamuoliuką, ši penktoji grupelė būtinai susidarys. Taigi, mažiausiai reikia ištraukti 41 kamuoliuką. ◄

9 uždavinys. Įrodykite, kad tarp bet kurių $n + 1$ natūraliųjų skaičių galima rasti du skaičius, kuriuos padalijus su liekana iš n, jų liekana sutaps.

Sprendimas. Kiekvieną iš $n + 1$ skaičių padalinkime su liekana iš n. Kadangi skirtingų liekanų daugiausiai gali būti n, tai iš $n + 1$ skaičių bent dvi liekanos sutaps. ◄

10 uždavinys. Jonas Rietaviškis ir Motiejus Varniškis stumdo figūrėlę ant 100 langelių ilgio juostos. Pradžioje Motiejus pasirenka langelį ir padeda ten figūrėlę. Kiekvienu ėjimu Jonas pasako natūralųjį skaičių iš intervalo $[1, 51]$, o Motiejus pastumia figūrėlę per pasakytą skaičių langelių į dešinę arba į kairę, bet negali išeiti iš juostos ribų. Jonas laimi, kai Motiejus negali padaryti ėjimo. Įrodykite, kad Jonas gali taip parinkti skaičius, kad laimėtų po baigtinio skaičiaus ėjimų.

Sprendimas. Sunumeruokime juostinės lentos langelius nuo 1 iki 100 iš kairės į dešinę. Jonas laimės, kai figūrėlė stovės 50-tame arba 51-tame langelyje ir Jonas pasakys skaičių 51. Tuomet Motiejui neužteks langelių nei į kairę, nei į dešinę. Taigi, Jono tikslas yra įvaryti figūrėlę į 50-tą arba 51-tą langelį. Taip Jonas gali padaryti pasirinkęs tokią strategiją. Nemažindami bendrumo galime teigti, kad pradžioje Motiejus figūrėlę pastato į k-tajį langelį ir $k \leqslant 50$ (jei Motiejus pastatytų figūrėlę į dešiniąją lentos pusę, galėtume lentą apsukti). Tuomet Jonas pasako skaičių $50 - k$. Jei Motiejus paeina į dešinę, figūrėlė atsiduria 50 langelyje ir Motiejus pralaimi. Jei Motiejus paeina į kairę, figūrėlė atsiduria langelyje $k' \leqslant k$. Tuomet Jonas pasako skaičių $50 - k'$ ir t. t. Kadangi lenta baigtinė, tai kažkuriuo ėjimu Motiejus nebegalės paeiti į kairę, todėl eis į dešinę ir atsidurs 50 langelyje, kur jo jau laukia pralaimėjimas. ◄

Pastaba. Jonas gali žaisti ir paprasčiau: paeiliui sakyti skaičius 51, 50, 51, 50, 51, 50,.... Įsitikinkite, kad taip žaisdamas Jonas visada laimėtų.