

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XXI LIETUVOS 5-6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2019 09 28

1. Penktokas Rokas nuo darželio laikų nieku gyvu nėra ko nors nepaklauses paėmęs iš garsiosios močiutės Danutės saldumynų dėžutės ir apskritai su savo močiute jis kalbasi taip pat rimtai kaip ir kaimynystėje gyvenantis rašytojas (ir matematikas) Gintaras. Kartą jis pasakė savo močiutei, kad visą sekančią savaitę jis paskirs, jo žodžiais tariant, „skaitymo įgūdžių renovacijai“. Per keturias savaitės dienas nuo pirmadienio iki ketvirtadienio jis numatęs perskaityti iš viso 28 puslapius teksto, o per keturias savaitės dienas nuo ketvirtadienio iki sekmadienio jis įveiks net iš visus 40 puslapių.

Ar galėtų mūsų herojus penktokas Rokas griežtai laikydamasis savo pažadų per išsistą savaitę, arba per visas septynias savaitės dienas nuo pirmadienio iki sekmadienio, perskaityti 52 puslapių knygelę?

Paiškindite mums, kiek puslapių galėtų būti pačioje ploniausioje knygelėje, kurią prisilaikydama visų savo duotų pažadų penktokas Rokas galėtų perskaityti? Ir kiek puslapių galėtų būti pačioje storiausioje jo taip perskaitytoje knygelėje?

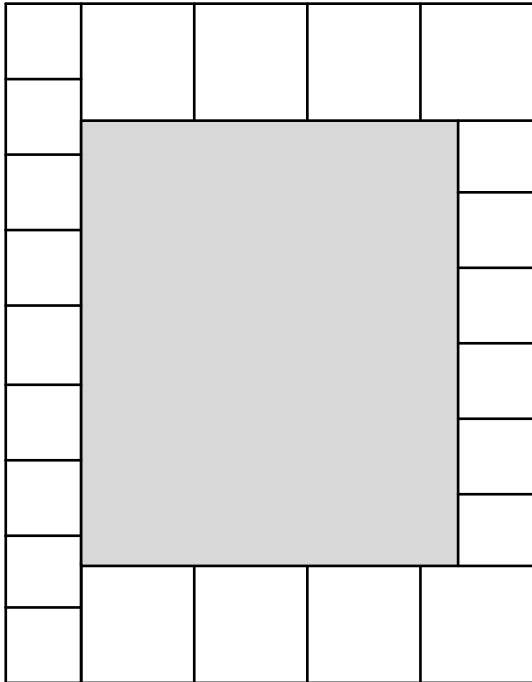
2. Penktokas Rokas iš kažkur ištraukė pageltusią knygutę, kurią bevartydamas susivokė, kad laiko rankose močiutės Danutės primargintą įdomesnių uždavinių rinkinį „Paprasti bet neprasti uždaviniai visiems – nuo lopšelio iki licėjaus“. Jis pabandė iš jo kažką pasprendinėti ir tuojau su nuostaba suvokė, kad ten yra gražaus darbelio kiekvienam – nuo studento iki vaikelio ☺. Kad įeitų į ritmą ir kiek apsiraminęs penktokas Rokas pasiėmė 7 lapelius popieriaus. Pirmajame lapelyje Rokas užsirašė, kelių močiutės knygelės puslapių numeracijoje (nors kartą) yra panaudotas skaitmuo 1, antrame lapelyje – kelių puslapių numeracijoje (nors kartą) yra panaudotas skaitmuo 2 ir taip toliau, kol galiausiai septintame lapelyje Rokas parašė, kelių rinkinio puslapių numeracijoje (nors kartą) yra panaudotas skaitmuo 7. Baigęs užsirašinėti jis su nuostaba išvydo visuose 7 lapeliuose užrašytą vieną ir tą patį skaičių. Ar galėjo taip būti? O jeigu jau nuspręstumėte, kad tai ne pasakos, tai pasakykite, kiek puslapių galėjo būti tokiam legendiniame močiutės Danutės rinkinyje? (Primintume, kad puslapiai numeruojami nuo 1, kad močiutės rinkinyje buvo dviženklis puslapių skaičius ir dar kad rinkinio puslapių skaičius dalijasi be liekanos iš 4.)

3. Kai senelis Kristoforas mokė anūką Roką meškerioti, tai visada viskas baigdavosi taip, kad anūkas Rokas kažkodėl pagaudavo (daug) daugiau žuvies, kad net keista prisiminti ir visai nesuvokiama, kodėl taip. Sykį kai Rokas meškeriojo ir su seneliu ir katinu Studentu, tai tą kartą Rokas pagavo (pagal svorį) net 11 kartų daugiau žuvies negu jo senelis. Iš džiaugsmo jis 2 mažiausias žuvelės numetė savo amžinai išbadėjusiam Studentui ir po to jis jau teturėjo vos 8 kartus daugiau žuvies (pagal svorį) nei senelis. Kai jie grįžę su visu rimumu raportavo apie tai močiutei Danutei, ji ėmė labai juoktis ir tuoj pasakė, jog yra visai aišku, kad jog jos anūkelis menkai žuvelių tą dieną teištraukė. Kiek daugiausiai žuvų tą dieną galėjo būti sugavęs anūkas Rokas? Jis galėjo būti sugavęs:

(A) Daugiausiai 9 žuvis (B) Daugiausiai 8 žuvis (C) Daugiausiai 7 žuvis (D) Daugiausiai 6 žuvis (E) Daugiausiai 5 žuvis

4. Penktokas Rokas norėtų į 3×3 lentelę, talpindamas po vieną skaičių kiekviename langelyje, surašyti visus skaičius nuo 1 iki 9 taip, kad visų keturių tos lentelės 2×2 kvadratų skaičių sumos būtų kokie nors keturi iš eilės einantys skaičiai. Rokas turi abejonių, ar tai įmanoma, tuo tarpu jo močiutė Danutė tik šyptelėjo ir pasakė: „Dar ir ne tokių stebuklų būna šiame pasaulyje“☺ Tai kaip čia iš tikrųjų yra? Ar yra galima taip užpildyti lentelę – ar tai yra visiškai neįmanoma?

5. Patamsintą stačiakampį, kurio pagrindo ilgis yra 8, močiutė Danutė „apdėjo“ dviejų skirtingų dydžio kvadratų „žiedu“, kaip parodyta brėžinyje taip, kad po to radosi kitas stačiakampis, tik dar didesnis.



Po to ji turi mums, čia eilutes pamačiusiems, vieną klausimą: o koks gi buvo to pradinio vidinio stačiakampio aukštis? Tas pradinio vidinio stačiakampio aukštis yra:

- (A) 9 (B) $\frac{28}{3}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{48}{5}$ (E) 10

XXI LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2019 09 28

1. Kartą močiutė Danutė linksmu ryžtingu balsu pasakė, kad ji nupirktų kilogramą šokoladinių ledų kiekvienam, kuris jai per pusvalandį išaiškintų, kokių skaičių nuo 1 iki 10 000 imtinai yra daugiau: ar tokių, kurių skaitmenų suma yra lyginė (kaip kad, sakysime, lyginė yra skaičiaus 1825 skaitmenų suma, nes $1 + 8 + 2 + 5 = 16$), ar tokių, kurių skaitmenų suma yra nelyginė (kaip skaičiaus 4568 skaitmenų suma $4 + 5 + 6 + 8 = 23$).

2. Septintokas Rokas kartą pamatė įdomią sumą $S = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \dots + 1111111$. Paskutiniame dėmenyje yra lygiai n vienetų. Rokas nejučia pradėjo galvoti, kiek mažiausiai dėmenų turėtų būti tokioje sumoje, kad ji dalintųsi iš 5. Po to jis panūdo nustatyti ir koks pats mažiausias dėmenų skaičius atneštų dalybą iš 45.

3. Močiutės Danutės kaimynas matematikas ir rašytojas Gintaras natūralųjį skaičių N vadina *neišpasakytai kietu*, jeigu jis tenkina absoliučiai visas žemiau nurodytas sąlygas:

- a) jis dalijasi iš 11;
- b) jame nėra nė vieno nulinio skaitmens;
- c) jis ne tik pats dalijasi iš 12, bet ir bet koks skaičius, kurį gautume iš N , bet kaip perstatę jo skaitmenis, taip pat dalytųsi iš 12.

Parašykite kokį nors vieną neišpasakytai kietą skaičių, turintį 10 skaitmenų. Kiek tokių dešimtženklių skaičių yra iš viso?

4. Močiutė Danutė paėmė stačiakampį su sveikomis kraštinėmis į supjaustė jį į kvadratėlius su kraštinių ilgiais 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Grįžusio iš mokyklos septintoko Roko laukė uždavinys – pasakyti, koks buvo supjaustyto stačiakampio perimetras.

5. Septintokas Rokas kažkur rado 4×4 lentelę ir jau savaitę negali mesti keisto užsiėmimo: jis įvairiais būdais surašo toje lentelėje skaičius nuo 1 iki 16, stengdamasis, kad skirtumai tarp kaimyninių skaičių būtų kuo mažesni. Suprantama, į langelį rašomas tik vienas skaičius ir skaičiai skirtinguose langeliuose turi būti skirtingi. Kaimyniniais jis vadina skaičius, užrašytus gretimuose langeliuose – tokiuose, kurie turi bendrą kraštinę, o didžiausią tokių skaičių skirtumą jis galų gale pradėjo vadinti kaimyninių skaičių viršininku. Taigi Roką kankinantį klausimą galima suformuluoti taip: koks yra mažiausias įmanomas kaimyninių skaičių viršininkas?