KETVIRTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO MATEMATIKOS OLIMPIADA

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

IX klasė

1. Ats. $(0,1,0)$ ir $(9,10,12)$.

   Jei $x+y=0$, tai $z^3=x^3+y^3-1=x^3+(-x)^3-1=-1$ ir $z=-1$. Tada $2x^3-6x=-1-4x^2$. Kai x sveikasis, tai šios lygybės kairėje yra lyginis skaičius, o dešinėje – nelyginis. Vadinasi,

$$x+y\neq 0,\quad (y-x)(y+x)=x+y \implies y-x=1 \implies y=x+1 \implies$$

$$z^3=x^3+(x+1)^3-1=2x^3+3x^2+3x \implies 2x^3-6x=(2x^3+3x^2+3x)-4x^2 \implies$$

$$x^2=9x \implies x=0 \text{ arba } 9,\quad y=x+1,\quad z=\sqrt[3]{2x^3+3x^2+3x}.$$

   Gauname sprendinius $(0,1,0)$ ir $(9,10,12)$. Jie tenkina pradinę sistemą.

2. Ats. Visos poros (m,n), kur skaičiai m ir n lyginiai.

   Neneigiamų sveikųjų skaičių porą (x,y) vadinkime bjauria, jei abu jos skaičiai lyginiai. Tarkime, kad tam tikru metu krūvelėse liko po a ir b monetų. Pastebėkime:

   1) Jei pora (a,b) bjauri, tai po tolimesnio ėjimo (jei toks apskritai galimas) gausime monetų kiekių krūvelėse porą $(a,b-1)$, $(a-1,b)$, $(a-1,b-1)$, $(a+1,b-1)$ arba $(a-1,b+1)$ – bet kuriuo atveju pora jau nebus bjauri.
   2) Jei pora (a,b) nebjauri, tai žaidėjas visada gali atlikti tokį tolimesnį ėjimą, kad monetų kiekių pora taptų bjauri, o bendras monetų skaičius sumažėtų. Jei a ir b lyginumas skiriasi, tai žaidėjas gali išmesti monetą iš krūvelės su nelyginiu skaičiumi monetų, o jei a ir b abu nelyginiai – išmesti po monetą iš abiejų krūvelių.

   Vadinasi, jei pora (m,n) nebjauri, tai Algis gali laikytis pergalės strategijos, nurodytos punkte 2): porai esant nebjauriai, visada daryti tokį ėjimą, kad monetų skaičius sumažėtų, pora taptų bjauri, o tada po Balio tolimesnio ėjimo – vėl nebjauri. Taip Algis visada galės atlikti ėjimą, bendras monetų skaičius vis mažės, ir žaidimas baigsis, kai ėjimo negalės atlikti Balys, krūvelėse likus po $a=b=0$ monetų. Kita vertus, jei pora (m,n) bjauri, tai po Algio pirmojo ėjimo ji taps nebjauri. Tada tokią pačią pergalės strategiją turės Balys.

3. Ats. $99°$. Žr. X kl. a) dalies sprendimą.

4. Ats. 000, 250, 500, 750.

   Tris skaičius pažymėkime x, y, z. Skaičiai $a = x+y-z$, $b = y+z-x$, $c = x+z-y$ dalijasi iš 10. Todėl iš 10 dalijasi ir $a+c = 2x$, $a+b = 2y$, $b+c = 2z$. Vadinasi, x, y, z dalijasi iš 5. Be to, bent vienas iš jų lyginis: kitaip nelyginis skaičius a nesidalytų iš 10. Sandauga xyz dalijasi iš $2 \cdot 5^3 = 250$ ir todėl baigiasi skaitmenimis 250, 500, 750, 000. Visi šie variantai galimi: pvz., kai $x = y = 5$, o $z = 10$, 20, 30 arba 40.

X klasė

1. Ats. $\sqrt{29}/2$, $\sqrt{189}/2$, $\sqrt{229}/2$, $\sqrt{269}/2$.

   Jei $[x] \leqslant 1$, tai $40[x] \leqslant 40 < 4x^2 + 51$. Jei $[x] \geqslant 10$, tai $x \geqslant 10$ ir $4x^2 + 51 \geqslant$ $\geqslant 40x + 51 > 40x \geqslant 40[x]$. Belieka patikrinti $[x] = 2, 3, 4 \ldots, 9$. Tada atitinkamai $4x^2 = 40[x] - 51 = 29$, 69, 109, 149, 189, 229, 269, 309. Kadangi $x \geqslant [x] > 0$, tai atitinkamai gauname galimus sprendinius

$$x_2 = \sqrt{7{,}25}, \quad x_3 = \sqrt{17{,}25}, \quad x_4 = \sqrt{27{,}25}, \quad x_5 = \sqrt{37{,}25},$$

$$x_6 = \sqrt{47{,}25}, \quad x_7 = \sqrt{57{,}25}, \quad x_8 = \sqrt{67{,}25}, \quad x_9 = \sqrt{77{,}25}.$$

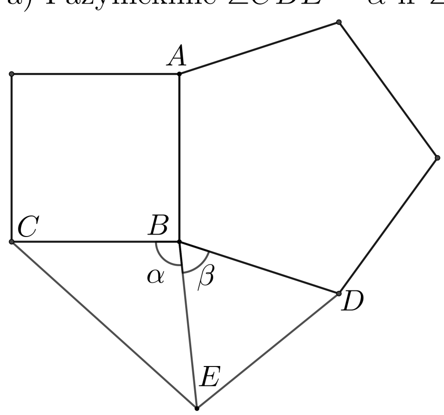
   Kadangi $2^2 < 7{,}25 < 3^2$, tai $2 < x_2 < 3$, $[x_2] = 2$, $4x_2^2 - 40[x_2] + 51 = 29 - 80 + 51 = 0$. Kadangi $17{,}25 > 4^2$, tai $x_3 > 4$ ir $[x_3] \neq 3$. Taigi, x_2 yra sprendinys, o x_3 netinka. Analogiškai patikriname sprendinius x_6, x_7, x_8 ir atmetame $x_4 > 5$, $x_5 > 6$, $x_9 < 9$.

2. Žr. IX klasės 2 uždavinio sprendimą.

3. Ats. a) 99°; b) 9.

   Taisyklingąjį m-kampį (beje, ir apskritai bet kokį m-kampį) galima padalyti į $m-2$ trikampius (pvz., įstrižainėmis, išeinančiomis iš tos pačios viršūnės), todėl m-kampio kampų suma lygi $(m-2) \cdot 180°$, o bet kuris vienas jo kampas lygus $(m-2) \cdot 180° : m$.

   a) Pažymėkime $\angle CBE = \alpha$ ir $\angle DBE = \beta$.



   Kadangi $AB = BC = BE = BD$, tai trikampiai BCE ir BDE lygiašoniai. Todėl $\angle BEC = 90° - \alpha/2$, $\angle BED = 90° - \beta/2$,

$$\angle CED = \angle BEC + \angle BED = 180° - (\alpha + \beta)/2 = 180° - \angle CBD/2,$$

$$\angle CBD = 360° - \angle ABC - \angle ABD = 360° - 90° - 3 \cdot 180° : 5 = 162° \implies \angle CED = 99°.$$

   b) Analogiškai kaip a) dalyje gauname $100° = \angle C'ED' = 180° - \angle C'BD'/2 \implies$ $160° = \angle C'BD' = 360° - \angle ABC' - \angle ABD' = 300° - (n-2) \cdot 180° : n \implies n = 9$.

4. (T. p. žr. XI ir XII kl. 4 uždavinį.) Tarkime, kad M ir N yra septintiniai skaičiai, M dalijasi iš N, ir $M : N = a > 1$. Skaičiaus N skaitmenų suma $s = 1 \cdot 10 + + 2 \cdot 10 + \ldots + 7 \cdot 10 = 280$ nesidalija iš 3, todėl N nesidalija iš 3.

   Pirmas įrodymas. Kadangi $N > 11\ldots11 = (10^{500} - 1) : 9$ ir $M < 77\ldots77 = = 7 \cdot (10^{500} - 1) : 9$, tai $a < 7$. Kadangi M nesidalija iš 3, tai $a \neq 3, 6$ ir $a = 2$, 4 arba 5. Įsivaizduokime, kad N dauginame iš a stulpeliu.

   1) Jei $a = 2$, tai, daugindami skaitmenis, mintyje kaskart turėsime palikti 0 arba 1. Tada po N skaitmeniu 4 turėsime rašyti 8 arba 9. 2) Jei $a = 4$, tai mintyje kaskart turėsime palikti 0, 1, 2 arba 3. Be to, 3 paliksime mintyje tik tada, kai iš a dauginsime N skaitmenį 7. Vadinasi, po N dešiniausiu septynetu turėsime parašyti 8, 9 arba 0. 3) Jei $a = 5$, tai mintyje kaskart turėsime palikti 0, 1, 2 arba 3. Todėl po N lyginiu skaitmeniu turėsime rašyti 0, 1, 2 arba 3, o po nelyginiu – 5, 6, 7 arba 8. Niekada negausime skaitmens 4.

   Skaičiuje M nėra skaitmenų 0, 8, 9, bet yra skaitmuo 4 – gauname prieštarą.

   Antras įrodymas. Skaičių $M - 1$ ir $N - 1$ skaitmenų sumos $s - 1 = 279$ dalijasi iš 9, todėl $M - 1$, $N - 1$ ir $(a-1)N = M - N = (M - 1) - (N - 1)$ dalijasi iš 9. Kadangi N nesidalija iš 3, tai $a - 1 > 0$ dalijasi iš 9 $\Longrightarrow$ $a - 1 \geqslant 9$, $a \geqslant 10$, o skaičius $M \geqslant 10N$ turi bent 71 skaitmenį. Prieštara.

   Trečias įrodymas. Bet kuris natūralusis skaičius dalijasi iš 9 su tokia pačia liekana kaip jo skaitmenų suma. Todėl $M \equiv N \equiv s \equiv 1 \pmod 9$ ir $1 \equiv M \equiv aN \equiv a \pmod 9$ $\Longrightarrow$ $a \geqslant 9 + 1 = 10$, o $M \geqslant 10N$ turi bent 71 skaitmenį. Prieštara.

XI ir XII klasės

1. Ats. $(1, 1, 1)$.

   Pastebėkime, kad $(1 - x)(1 - z) \geqslant 0$ ir todėl $1 + xz \geqslant x + z$,

$$\frac{x}{1 + y + zx} \leqslant \frac{x}{x + y + z},$$

$$\text{analogiškai} \quad \frac{y}{1 + z + xy} \leqslant \frac{y}{x + y + z}, \quad \frac{z}{1 + x + yz} \leqslant \frac{z}{x + y + z}.$$

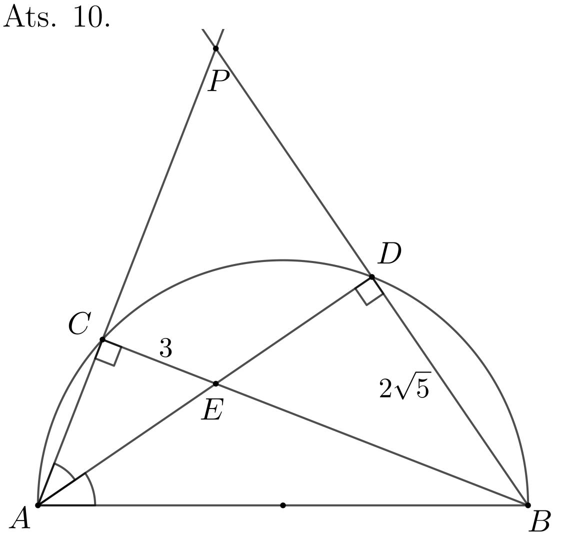
   Vadinasi,

$$\frac{3}{x + y + z} = \frac{x}{1 + y + zx} + \frac{y}{1 + z + xy} + \frac{z}{1 + x + yz} \leqslant \frac{x + y + z}{x + y + z}$$

   ir $x + y + z \geqslant 3$. Kadangi $x, y, z \leqslant 1$, taip gali būti, tik jei $x = y = z = 1$. Šis skaičių trejetas tenkina uždavinio sąlygą.

2. Kvadratą linijomis, lygiagrečiomis su kvadrato kraštinėmis, padalykime į 12 stačiakampių langelių 3×4. Pagal Dirichlė principą viename iš 12 langelių yra 21 nuspalvintas taškas: $241 = 12 \cdot 20 + 1$. Iš tų 21 taško yra bent 11 vienspalvių. Atstumas tarp bet kurių dviejų iš jų neviršija langelio įstrižainės $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

3. Ats. 10.



Tiesių AC ir BD sankirtos tašką pažymėkime P. Kadangi AB – skersmuo, tai $BC \perp AC$ ir $AD \perp BD$. Kadangi lankai BD ir CD lygūs, tai $\angle CAD = \angle BAD$. Vadinasi, atkarpa AD yra trikampio ABP aukštinė ir pusiaukampinė $\Longrightarrow$ $BD = DP = 2\sqrt{5}$. Be to, $\angle PCE + \angle PDE = 90° + 90° = 180°$, tad keturkampis $CPDE$ yra įbrėžtinis $\Longrightarrow$ $BE \cdot BC = BD \cdot BP = 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 40$ (kirstinių savybė). Jei $BE = x$, tai $BC = x + 3$ ir $40 = BE \cdot BC = x^2 + 3x$. Lygtis $x^2 + 3x - 40 = 0$ turi vienintelį teigiamą sprendinį $x = 5$. Tada $BE = 5$, $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = \sqrt{5}$ (Pitagoro t.), $AE = BE \cdot CE : DE = 3\sqrt{5}$ (stygų savybė), $AD = AE + DE = 4\sqrt{5}$, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 10$ (Pitagoro t.).

4. (T. p. žr. X kl. 4 uždavinį.) Bet kuris natūralusis skaičius dalijasi iš 9 su tokia pačia liekana kaip jo skaitmenų suma. Todėl bet kokiam penktiniam skaičiui P turime

$$P \equiv 2 \cdot 100 + 3 \cdot 100 + \ldots + 6 \cdot 100 \equiv 2000 \equiv 2 \pmod 9.$$

a) Tarkime, kad M dalijasi iš penktinio skaičiaus Q ir $a = M : Q$. Tada $2 \equiv M \equiv aQ \equiv 2a \pmod 9$ ir $a \equiv 1 \pmod 9$. Jei $a > 1$, tai $a \geqslant 10$, o $M \geqslant 10Q$ turi bent 501 skaitmenį – prieštara. Vadinasi, $a = 1$ ir $M = Q$.

b) Tarkime, kad N dalijasi iš penktinio skaičiaus Q ir $a = N : Q$. Tada

$$2a \equiv aQ \equiv N \equiv 100M + 81 \equiv M \equiv 2 \pmod 9 \implies a \equiv 1 \pmod 9.$$

Skaičius N nelyginis ir nesidalija iš 5, todėl Q paskutinis skaitmuo gali būti tik 3, o tada skaičiaus a – tik 7. Galėtų tikti tik $a = 37$, 127 arba 217. Tolimesnė reikšmė, kuri dalijasi iš 9 su liekana 1 ir baigiasi skaitmeniu 7, lygi 307. Ji jau per didelė, nes $Q \cdot 307 > 22\ldots22 \cdot 300 = 66\ldots6600 > N$ (čia vietoj daugtaškių yra po 496 skaitmenis). Taigi, $81 \equiv N \pmod{100} \equiv Qa \equiv 37 \cdot \overline{u3}$, $27 \cdot \overline{u3}$ arba $17 \cdot \overline{u3}$, kur u yra priešpaskutinis skaičiaus Q skaitmuo. Be to, mod 100 turime:

$$37 \cdot \overline{u3} \equiv 370u + 111 \equiv 70u + 11, \quad 27 \cdot \overline{u3} \equiv 70u + 81, \quad 17 \cdot \overline{u3} \equiv 70u + 51,$$

$$70u \equiv 81 - 11, \quad 81 - 81 \quad \text{arba} \quad 81 - 51,$$

t. y. 100 dalija $70u - 70$, $70u$ arba $70u - 30 = (70u + 70) - 100$. Taigi, 10 dalija $u - 1$, u arba $u + 1$. Tada $u = 1$, 0 arba 9. Prieštara.