

**KETVIRTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2019 m. kovo 2 d.

IX klasė

1. Raskite visus sveikųjų skaičių trejetus (x, y, z) , tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = z^3 + 1, \\ y^2 - x^2 = x + y, \\ 2x^3 - 6x = z^3 - 4x^2. \end{cases}$$

2. Algis ir Balys žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Pradžioje yra dvi monetų krūvelės: vienoje krūvelėje yra m monetų, o kitoje yra n monetų. Ėjimo metu reikia atlikti bet kurią vieną iš šių trijų veiksmų: 1) išmesti vieną monetą iš bet kurios krūvelės; 2) išmesti po vieną monetą iš abiejų krūvelių; 3) perkelti vieną monetą iš bet kurios krūvelės į kitą. Pradedą Algis. Žaidėjas, negalintis atlikti ėjimo, pralaimi. Nustatykite visas natūraliųjų skaičių (m, n) poras, kurioms Balys turi pergalės strategiją, t. y. kurioms jis gali užsitikrinti pergalę, kad ir kaip žaistų Algis.
3. Kvadratas $ABCX$, taisyklingasis penkiakampis $ABDY_1Y_2$ ir taisyklingasis tūkstantkampis $ABEZ_1Z_2 \dots Z_{997}$ turi bendrą kraštinę AB . Taškas D yra tūkstantkampio viduje, o taškas C – jo išorėje. Raskite kampą CED .
4. Jurgis užrašė tris natūraliuosius skaičius, iš kurių kiekvienas baigiasi tuo pačiu skaitmeniu kaip kitų dviejų skaičių suma, ir sudaugino juos. Jurgis užrašė tik sandaugos paskutinius tris skaitmenis. Kokį skaitmenų trejetą jis galėjo gauti? Raskite visas galimybes.

**KETVIRTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2019 m. kovo 2 d.

X klasė

1. Raskite visus lygties

$$4x^2 - 40[x] + 51 = 0$$

realiuosius sprendinius x . (Čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnę už x .)

2. Algis ir Balys žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Pradžioje yra dvi monetų krūvelės: vienoje krūvelėje yra m monetų, o kitoje yra n monetų. Ėjimo metu reikia atlikti bet kurią vieną iš šių trijų veiksmų: 1) išmesti vieną monetą iš bet kurios krūvelės; 2) išmesti po vieną monetą iš abiejų krūvelių; 3) perkelti vieną monetą iš bet kurios krūvelės į kitą. Pradedą Algis. Žaidėjas, negalintis atlikti ėjimo, pralaimi. Nustatykite visas natūraliųjų skaičių (m, n) poras, kurioms Balys turi pergales strategiją, t. y. kurioms jis gali užsitikrinti pergalę, kad ir kaip žaistų Algis.
3. Kvadratas $ABCX$, lygiakraštis trikampis ABC' , taisyklingasis penkiakampis $ABDY_1Y_2$, taisyklingasis n -kampis $ABD'Z_1Z_2 \dots Z_{n-3}$ ir taisyklingasis tūkstantkampis $ABEU_1U_2 \dots U_{997}$ turi bendrą kraštinę AB . Taškai D ir D' yra tūkstantkampio viduje, o taškai C ir C' – jo išorėje. Raskite a) $\angle CED$; b) tokį $n > 3$, kad $\angle C'ED' = \angle CED + 1^\circ$.
4. Natūralųjį skaičių vadinsime *septintiniu*, jei jis turi lygiai 70 skaitmenų: 10 vienetų, 10 dvejetų, ..., 10 septynetų. Įrodykite, kad jei vienas septintinis skaičius dalijasi iš kito, tai jie lygūs.

**KETVIRTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2019 m. kovo 2 d.

XI ir XII klasės

1. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (x, y, z) , kuriems $0 < x, y, z \leq 1$ ir

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}.$$

2. Kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra 12, viduje pažymėtas 241 taškas. Kiekvienas iš jų nuspalvintas arba raudonai, arba mėlynai. Įrodykite: kad ir kaip buvo pažymėti bei nuspalvinti taškai, įmanoma taip pasirinkti 11 iš jų, kad jie visi būtų tos pačios spalvos ir kad atstumas tarp bet kurių dviejų iš tų 11 taškų būtų ne didesnis už 5.
3. Taškas $C \neq A, B$ priklauso apskritimui, kurio skersmuo yra atkarpa AB . Taškas D trumpesnįjį apskritimo lanką BC dalija pusiau. Tiesės AD ir BC kertasi taške E . Raskite atkarpos AB ilgį, jei $CE = 3$, $BD = 2\sqrt{5}$.
4. Natūralųjį skaičių vadinsime *penktiniu*, jei jis turi lygiai 500 skaitmenų: po 100 dvejetų, trejetų, ketvertų, penketų ir šešetų. Prie penktinio skaičiaus M iš dešinės prirašius du skaitmenis 81, gautas skaičius $N = \overline{M81}$. Įrodykite, kad a) M nesidalija iš jokio penktinio skaičiaus, išskyrus save patį; b) N nesidalija iš jokio penktinio skaičiaus.