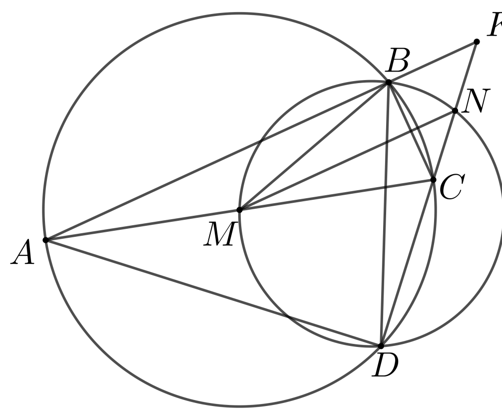
Atranka į 2018 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Sprendimai

Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis $ABCD$. Tiesių spinduliai AB ir DC kertasi taške K. Atkarpų AC ir CK vidurio taškai atitinkamai pažymėti M ir N. Taškai B, D, M, N priklauso vienam apskritimui. Raskite visas galimas $\angle ADC$ reikšmes.

   Sprendimas. Kadangi MN yra trikampio ACK vidurio linija, tai $MN||AK$ ir tada $\angle ABM = \angle BMN$ (priešiniai kampai).



   Pastebėkime, kad $\angle BAC = \angle BDC$ ir $\angle BMN = \angle BDN$ (įbrėžtiniai kampai). Tada $\angle BAM = \angle BAC = \angle BDC = \angle BDN = \angle BMN = \angle ABM$. Vadinasi, trikampis ABM lygiašonis ir $BM = AM = CM$. Apskritimas su centru M ir spinduliu AM eina per taškus A, B, C, taigi jis yra trikampio ABC apibrėžtinis apskritimas. Tada $AC = 2AM$ yra šio apskritimo skersmuo, ir $\angle ABC = 90°$. Vadinasi, $\angle ADC = 180° - \angle ABC = 90°$ (įbrėžtiniai kampai).

   Pastaba. Kadangi nepasakyta, kokia tvarka apskritime išsidėstę taškai B, N, D, M, galima būtų nagrinėti atvejį, kai vietoj lygybės $\angle BMN = \angle BDN$ turime $\angle BMN = 180° - \angle BDN$. Pakartoję sprendimą gautume, kad $\angle BAM + \angle ABM = 180°$, t. y. kad tiesės AM ir BM lygiagrečios. Tačiau jos kertasi taške M.

   Atsakymas: $\angle ADC = 90°$.

2. Duoti du natūralieji skaičiai $n \geqslant m \geqslant 2$. Gitanas ir Saulius žaidžia tokį žaidimą. Gitanas turi pasirinkti m skirtingų skaičių iš aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jei Saulius gali iš tų m skaičių pasirinkti tokius du skaičius a ir b, kad $a < b \leqslant 2a$, tai jis ir laimi žaidimą. Priešingu atveju, jei tokios poros (a, b) nėra, žaidimą laimi Gitanas.
   a) Įrodykite, kad Gitanas gali laimėti žaidimą, kai $(n, m) = (66, 6)$.
   b) Įrodykite, kad Saulius gali laimėti žaidimą, kaip bežaistų Gitanas, kai $(n, m) = (2018, 11)$.
   c) Kiekvienam $m \geqslant 2$ raskite visas n reikšmes, su kuriomis Saulius gali laimėti žaidimą, kad ir kaip bežaistų Gitanas.

Sprendimas. Įrodysime, kad kai $n \geqslant 2^m - 1$, žaidimą gali laimėti Gitanas, o Saulius laimi, kai $m \leqslant n \leqslant 2^m - 2$. Tai įrodo uždavinio a) ir b) dalis, nes $66 > 2^6 - 1 = 63$ ir $2018 < 2^{11} - 2 = 2046$.

Pažymėkime $a_k = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Tada $2a_k + 1 = a_{k+1}$, kai $k = 1, 2, \ldots$

Tegu $n \geqslant 2^m - 1$. Gitanas gali pasirinkti skaičius $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Bet kuriems dviems iš šių skaičių a_i ir a_j, $i < j$, turime $a_i < a_j$ ir

$$2a_i = a_{i+1} - 1 < a_{i+1} \leqslant a_j.$$

Kadangi jokiai galimai porai $a_i < a_j$ nelygybė $a_j \leqslant 2a_i$ negalioja, tai Gitanas laimi žaidimą.

Tarkime, kad $m \leqslant n \leqslant 2^m - 2$. Suskirstykime visus skaičius nuo 1 iki $2^m - 2$ į aibes $A_1, \ldots, A_{m-1}$ taip: $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4, 5, 6\}$,

$$A_i = \{2^i - 1, 2^i, \ldots, 2^{i+1} - 2\} = \{a_i, a_i + 1, \ldots, 2a_i\}.$$

Čia $i = 1, 2, \ldots, m - 1$. Aišku, kad

$$\{1, 2, \ldots, n\} \subset A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{m-1}.$$

Pastebėkime, kad didžiausias aibės A_i elementas yra dvigubai didesnis už mažiausiąjį. Vadinasi, bet kurie du skirtingi vienai aibei A_i priklausantys skaičiai $a < b$ tenkina nelygybę $b \leqslant 2a$. Pagal Dirichlė principą (turime m skaičių ir $m-1$ aibę), bent du Gitano parinkti skaičiai pateks į vieną aibę A_j, čia $1 \leqslant j \leqslant m - 1$. Tuos du skaičius nurodęs Saulius laimės žaidimą.

Atsakymas: c) $m \leqslant n \leqslant 2^m - 2$.

3. Natūralųjį skaičių n vadinkime *sėkmingu*, jei egzistuoja be galo daug teigiamų racionaliųjų skaičių rinkinių $(a_1, \dots, a_n)$, su kuriais abu skaičiai $a_1 + \dots + a_n$ ir $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$ yra natūralieji. (Pavyzdžiui, skaičius $n = 1$ nėra sėkmingas, nes a_1 ir $\frac{1}{a_1}$ abu yra natūralieji tada ir tik tada, kai $a_1 = 1$. Skaičiai $a_1, \dots, a_n$ nebūtinai skirtingi.)
   a) Įrodykite, kad skaičius $n = 2$ nėra sėkmingas.
   b) Įrodykite, kad kiekvienas natūralusis skaičius $n \geqslant 3$ yra sėkmingas.

Sprendimas. a) Tarkime, kad a_1, a_2 yra tokie teigiami racionalieji skaičiai, kad $a_1 + a_2 \in \mathbb{N}$ ir $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \in \mathbb{N}$. Įrodysime, jog tada $(a_1, a_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 1)$ arba $(2, 2)$, taigi tinkami rinkiniai yra tik trys. Iš tikrųjų, kadangi

$$(a_1 + a_2)\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\Big) = 2 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \in \mathbb{N},$$

tai $k = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$ (čia $x = \frac{a_1}{a_2}$). Remiantis aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe, turime $k = x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Jei $k = 2$, tai $x = 1$ ir $a_1 = a_2$. Iš $2a_1, \frac{2}{a_1} \in \mathbb{N}$ gauname, kad $a_1 = \frac{s}{2}$, kur $s \in \mathbb{N}$ ir $\frac{2}{a_1} = \frac{4}{s} \in \mathbb{N}$. Tada $s = 1, 2, 4$ ir $(a_1, a_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 1), (2, 2)$.

Jei $k \geqslant 3$, tai $x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$. Skaičius x racionalusis, tik kai $k^2 - 4$ yra tikslusis kvadratas, t. y. $k^2 - 4 = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Tačiau kai $k \geqslant 3$, tai $k^2 > k^2 - 4 > (k-1)^2$, prieštara.

b) Pastebėkime, kad pakanka įrodyti, jog skaičius $n = 3$ yra sėkmingas, nes kiekvieną teigiamų racionaliųjų skaičių rinkinį (a_1, a_2, a_3), tenkinantį sąlygas $a_1 + a_2 + a_3 \in \mathbb{N}$ ir $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \in \mathbb{N}$, galima papildyti vienetais $(a_1, a_2, a_3, 1, \dots, 1)$. Akivaizdu, kad toks n teigiamų racionaliųjų skaičių rinkinys taip pat tenkins reikiamas sąlygas.

Norėdami sukonstruoti be galo daug teigiamų racionaliųjų skaičių trejetų a_1, a_2, a_3, tenkinančių sąlygas $a_1 + a_2 + a_3 \in \mathbb{N}$ ir $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \in \mathbb{N}$, imkime tokį trejetą:

$$(a_1, a_2, a_3) = \Big(\frac{1}{1+a+b}, \frac{a}{1+a+b}, \frac{b}{1+a+b}\Big), \quad \text{kur} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Su bet kuriais $a, b \in \mathbb{N}$ šio trejeto skaičių suma yra lygi 1, o jiems atvirkštinių skaičių suma –

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 3 + a + b + \frac{1+b}{a} + \frac{1+a}{b}.$$

Pastarasis skaičius yra natūralusis, kai, pavyzdžiui,

$$\frac{1+b}{a}+\frac{1+a}{b}=\frac{a^2+a+b^2+b}{ab}=3,$$

t. y.

$$a^2-(3b-1)a+b^2+b=0. \tag{2}$$

Ši lygtis turi natūralųjį sprendinį $(a,b)=(2,3)$. Iš bet kurio natūraliojo sprendinio (a,b), $a<b$, galima gauti kitą natūralųjį sprendinį (b,a_0), kuriame a_0 yra kitas (2) kaip kvadratinės lygties a atžvilgiu sprendinys, t. y. $a+a_0=3b-1$ ir $aa_0=b^2+b$. Iš nelygybės

$$a_0=\frac{b^2+b}{a}>\frac{b^2}{a}>b$$

išplaukia, kad šioje poroje (b,a_0) galioja nelygybė $b<a_0$. Be to, $a_0=$ $=3b-1-a\in\mathbb{N}$. Lygtį (2) tenkina sprendinys (a_0,b), tačiau joje sukeitus vietomis a ir b, lygtis nepakinta. Todėl tęsdami šį procesą gausime be galo daug natūraliųjų skaičių porų (a,b), tenkinančių (2) lygtį:

$$(2,3),(3,6),(6,14),(14,35),\ldots$$

Su kiekviena iš jų teigiamų racionaliųjų skaičių trejetai, apibrėžti (1) lygybe, yra skirtingi (skaičius a_1 visą laiką mažėja) ir tenkina abi sąlygas $a_1+a_2+a_3=1\in\mathbb{N}$ bei $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=6+a+b\in\mathbb{N}$.

Pastaba. Remiantis lygybe $a+a_0=3b-1$, natūraliųjų skaičių seką $2,3,6,14,35,\ldots$ galima apibrėžti taip: $x_1=2$, $x_2=3$ ir

$$x_{k+2}=3x_{k+1}-x_k-1,\quad k=1,2,3,\ldots.$$

Tada $x_{k+1}^2+x_{k+1}+x_k^2+x_k=3x_{k+1}x_k$. Vadinasi, kiekvienam $k\in\mathbb{N}$ racionaliųjų skaičių trejetui

$$(a_1,a_2,a_3)=\left(\frac{1}{1+x_k+x_{k+1}},\frac{x_k}{1+x_k+x_{k+1}},\frac{x_{k+1}}{1+x_k+x_{k+1}}\right)$$

galioja lygybės $a_1+a_2+a_3=1$ ir $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=6+x_k+x_{k+1}$.

4. Kiekvienam natūraliajam nelyginiam n nustatykite, koks yra skaičiaus

$$\frac{10^{n(n+1)}}{10^n+6}$$

vienetų skaitmuo. (Pavyzdžiui, skaičiaus 27,83 vienetų skaitmuo yra 7, o skaičiaus $\pi=3{,}14\ldots$ vienetų skaitmuo yra 3.)

Sprendimas. Kiekvienam natūraliajam n ir bet kokiems skaičiams a, b teisinga formulė

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n).$$

Kiekvienam natūraliajam nelyginiam n turime

$$\begin{aligned}\frac{10^{n(n+1)}}{10^n+6} &= \frac{10^{n(n+1)} - 6^{n+1}}{10^n+6} + \frac{6^{n+1}}{10^n+6} = \\ &= \frac{(10^n)^{n+1} - (-6)^{n+1}}{10^n - (-6)} + \frac{6^{n+1}}{10^n+6} = \\ &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n + \frac{6^{n+1}}{10^n+6},\end{aligned}$$

kur $a = 10^n$, $b = -6$.

Skaičius $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1}$ dalijasi iš a, todėl baigiasi skaitmeniu 0, o skaičius $b^n = (-6)^n = -6^n$ baigiasi skaitmeniu 6. Skaičius $\frac{10^{n(n+1)} - 6^{n+1}}{10^n+6}$ teigiamas ($10^n > 6$, todėl $10^{n(n+1)} > 6^{n+1}$) ir lygus

$$(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1}) + b^n = \overline{\ldots 0} - \overline{\ldots 6} = \overline{\ldots 4}.$$

Jis yra natūralusis ir baigiasi skaitmeniu 4.

Kai $n \geqslant 5$, tai

$$\begin{aligned}0 &< \frac{6^{n+1}}{10^n+6} = \frac{6^{n-4}\cdot 6^5}{10^{n-4}\cdot 10^4 + 6} < \frac{6^{n-4}\cdot 36\cdot 36\cdot 6}{10^{n-4}\cdot 10000} < \\ &< \frac{6^{n-4}\cdot 40\cdot 40\cdot 6}{10^{n-4}\cdot 10000} = \frac{6^{n-4}\cdot 9600}{10^{n-4}\cdot 10000} < 1.\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\frac{10^{n(n+1)}}{10^n+6} = \frac{10^{n(n+1)} - 6^{n+1}}{10^n+6} + \frac{6^{n+1}}{10^n+6} = \overline{\ldots 4} + \overline{0,\ldots} = \overline{\ldots 4,\ldots},$$

t. y. ieškomas vienetų skaitmuo lygus 4.

Liko išnagrinėti atvejus $n = 1$ ir $n = 3$. Kai $n = 1$, tai skaičiaus $\frac{10^{n(n+1)}}{10^n+6} = \frac{100}{16} = 6{,}25$ vienetų skaitmuo yra 6. Kai $n = 3$, tai skaičiaus

$$\frac{10^{n(n+1)}}{10^n+6} = \frac{10^{12}}{1006} = \frac{10^{12} - 6^4}{1006} + \frac{6^4}{1006} = \overline{\ldots 4} + \frac{1296}{1006} = \overline{\ldots 5,\ldots}$$

vienetų skaitmuo yra 5.

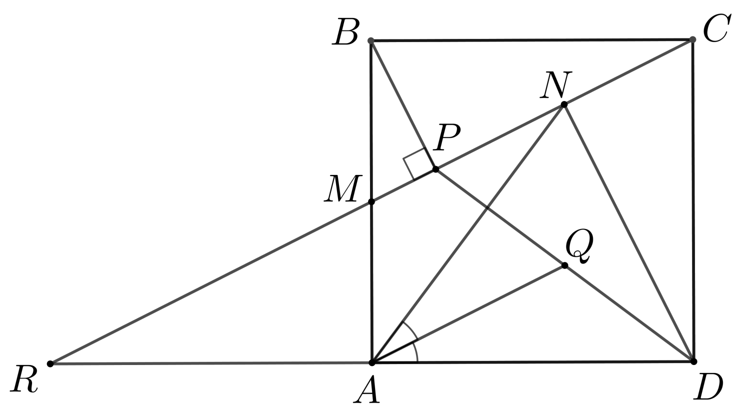
Atsakymas: 6, kai $n = 1$; 5, kai $n = 3$; 4, kai $n \geqslant 5$.

5. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas vidurio taškas M. Iš taško B į tiesę CM nuleistas statmuo kerta tiesę CM taške P. Taškas N dalija atkarpą CP pusiau. Kampo DAN pusiaukampinė ir tiesė DP kertasi taške Q. Įrodykite, kad keturkampis $BMQN$ yra lygiagretainis.

I sprendimas. Statieji trikampiai BMC ir PBC turi bendrą smailųjį kampą, todėl yra panašieji. Taigi $CP : BP = CB : MB = 2$ ir $BP = \frac{CP}{2} = CN$. Kadangi $BC = CD$, $BP = CN$ ir

$$\angle CBP = 90^\circ - \angle BCP = \angle DCN,$$

tai $\triangle CBP = \triangle DCN$ ir $DN \perp CN$. Trikampio CDP pusiaukraštinė DN sutampa su aukštine, todėl $DC = DP$.



Pažymėkime $R = AD \cap MC$. Tada (dėl simetrijos arba pagal kraštinę ir du kampus) $\triangle BCM = \triangle ARM$ ir $AR = BC = AD$. Stačiojo trikampio RND įžambinės vidurio taškas A yra trikampio apibrėžtinio apskritimo centras, todėl šio apskritimo spindulys lygus $AN = AD = AR$. Lygiašonio trikampio AND pusiaukampinė AQ yra ir aukštinė, todėl $AQ \perp DN$. Kadangi $DN \perp CM$, tai $AQ || MN$.

Žinome, kad trikampiai CDP ir ANR yra lygiašoniai, taigi

$$\angle DPN + \angle ANP = \angle RCD + \angle CRD = 90^\circ.$$

Vadinasi, $AN \perp DP$. Tiesės AQ ir DQ yra trikampio AND aukštinės, todėl ir tiesė NQ yra aukštinė, t. y. $NQ \perp AD$. Vadinasi, $NQ || AB$.

Keturkampio $AMNQ$ kiekvienos priešingos kraštinės lygiagrečios, todėl jis yra lygiagretainis ir $NQ = AM = BM$. Kadangi atkarpos BM ir NQ lygiagrečios bei lygios, tai ir keturkampis $BMQN$ yra lygiagretainis.

II sprendimas. Uždavinys nesunkiai išspręndžiamas koordinačių metodu. Laikykime, kas taškas A yra koordinačių pradžia $A = (0, 0)$ ir atitinkamai $B = (0, 1)$, $C = (1, 1)$, $D = (1, 0)$. Tada $M = (0, \frac{1}{2})$. Tiesės CM lygtis yra $y = \frac{x+1}{2}$, o statmens į ją BP lygtis yra $y = -2x + 1$. Tašką P randame kaip jų susikirtimo tašką: $P = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$. Kadangi N – atkarpos PC vidurio taškas, tai $N = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Vadinasi, tiesės AN lygtis yra $y = \frac{4x}{3}$. Tiesių $y = 0$ ir $y = \frac{4x}{3}$ sudaromo kampo pusiaukampinės AQ lygtis yra $y = \frac{x}{2}$. (Čia, pavyzdžiui, galima pasinaudoti tuo, kad jei $\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{4}{3}$, tai $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$.) Kadangi tiesės PD, einančios per taškus $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ ir $(1, 0)$, lygtis yra $y = \frac{-3x+3}{4}$, tai AQ ir PD sankirtos taško Q koordinatės yra $(\frac{3}{5}, \frac{3}{10})$. Gavome, kad taškų N ir Q abscisės lygios (abi $\frac{3}{5}$), taigi $BM||NQ$. Šių taškų ordinačių skirtumas yra $\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$, taigi $BM = NQ = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $BMQN$ – lygiagretainis.

6. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kurioms lygybė

$$(x + y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y))$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$.
(Čia $\mathbb{R}^+$ žymi visų realiųjų teigiamų skaičių aibę.)

I sprendimas. Duotąją lygybę pažymėkime $(*)$.

Tarkime, kad $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 \neq x_2$ ir $f(x_1) = f(x_2) = c$. Tada, įrašę $x = x_1$ ir $x = x_2$ į $(*)$, kiekvienam $y \in \mathbb{R}^+$ gauname, kad kvadratinė lygtis x atžvilgiu

$$(x + y)f(cy) = x^2(c + y) \iff x^2 - x \cdot \frac{f(cy)}{c + y} - \frac{yf(cy)}{c + y} = 0$$

visada turi tuos pačius du sprendinius $x = x_1$ ir $x = x_2$. Pagal Vijeto teoremą $x_1 + x_2 = \frac{f(cy)}{c+y}$ ir $x_1x_2 = -\frac{yf(cy)}{c+y} = -y(x_1 + x_2)$. Imdami bet kokį $y \in \mathbb{R}^+$, tenkinantį sąlygą $y \neq -\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$, gauname prieštarą.

Vadinasi, jei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ ir $f(x_1) = f(x_2)$, tai $x_1 = x_2$ (t. y. funkcija f yra injektyvi). Lygybėje $(*)$ imkime $x = y = 1$:

$$2f(f(1)) = 2f(1) \implies f(f(1)) = f(1) \implies f(1) = 1.$$

Lygybėje $(*)$ imkime $x = 1$ ir bet kokį $y \in \mathbb{R}^+$:

$$(1 + y)f(y) = 1 + f(y) \implies f(y) = \frac{1}{y}.$$

Gavome vienintelę galimą funkciją $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Ji tenkina uždavinio sąlygą:

$$(x+y)f(yf(x)) = (x+y) \cdot \frac{x}{y} = x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = x^2(f(x) + f(y)).$$

II sprendimas. Duotąją lygybę pažymėkime $(*)$.

Joje imkime $y = x$: tada $2xf(xf(x)) = 2x^2 f(x)$ ir $f(xf(x)) = xf(x)$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^+$. Pažymėkime $A = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) = x\}$. Tada $xf(x) \in A$ visiems $x \in \mathbb{R}^+$ (ir aibė A netuščia).

Tarkime, kad $x_1, x_2 \in A$. Įrašę $x = x_1$, $y = x_2$ į $(*)$ ir pasinaudoję tuo, kad $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$, gauname $f(x_1x_2)(x_1 + x_2) = x_1^2(x_1 + x_2)$ ir $f(x_1x_2) = x_1^2$. Įrašę į $(*)$ $x = x_2$, $y = x_1$, analogiškai gauname $f(x_1x_2) = x_2^2$. Tada $x_1^2 = x_2^2$ ir $x_1 = x_2$.

Vadinasi, aibėje A tėra vienintelis elementas. Jį pažymėkime c. Visiems $x \in \mathbb{R}^+$ turime $xf(x) \in A$, todėl $xf(x) = c > 0$ ir $f(x) = \frac{c}{x}$ visiems $x \in \mathbb{R}^+$.

Belieka patikrinti, su kokiomis konstantos $c > 0$ reikšmėmis tenkinama uždavinio sąlyga:

$$(x+y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y)) \iff (x+y) \cdot \frac{x}{y} = x^2 \cdot \left(\frac{c}{x} + \frac{c}{y}\right)$$
$$\iff (x+y) \cdot \frac{x}{y} = (x+y) \cdot \frac{cx}{y} \iff c = 1.$$

III sprendimas. Į $(*)$ įrašykime $x = 1$ ir $y = \frac{1}{f(1)}$. Gauname, kad $(1 + \frac{1}{f(1)})f(1) = f(1) + f(\frac{1}{f(1)})$, taigi $f(\frac{1}{f(1)}) = 1$. Dabar $(*)$ imkime $x = y = \frac{1}{f(1)}$. Gauname, kad $\frac{2}{f(1)} = \frac{1}{f(1)^2} \cdot (1 + 1)$, taigi $f(1)^2 = f(1)$. Kadangi $f(1) > 0$, tai $f(1) = 1$. Dabar sprendimą galima užbaigti taip, kaip nurodyta I sprendime.

Atsakymas: $f(x) = \frac{1}{x}$, kai $x \in \mathbb{R}^+$.