TREČIOJI VILNIAUS UNIVERSITETO MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO MATEMATIKOS OLIMPIADA

Atsakymai, sprendimai

IX klasė

1. Ats. $x = 1$.

Kai $x = 1$, tai $x^3 - x^2 - 2\sqrt{x} = -2$. Kita vertus, jei $x \neq 1$ ir $x \geqslant 0$, tai

$$x^3 - x^2 - 2\sqrt{x} = x^2(x-1) - 2(\sqrt{x}-1) - 2 =$$

$$= x^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) - 2(\sqrt{x}-1) - 2 = (\sqrt{x}-1)(x^2(\sqrt{x}+1)-2) - 2.$$

Jei $x > 1$, tai $\sqrt{x} > 1$ ir $x^2(\sqrt{x}+1) > 1^2 \cdot (1+1) = 2$. Jei $0 \leqslant x < 1$, tai $\sqrt{x} < 1$ ir $x^2(\sqrt{x}+1) < 1^2 \cdot (1+1) = 2$. Abiem atvejais turime, kad $(\sqrt{x}-1)(x^2(\sqrt{x}+1)-2) > 0$. Todėl

$$x^3 - x^2 - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)(x^2(\sqrt{x}+1)-2) - 2 > -2,$$

kai $x \geqslant 0$ ir $x \neq 1$.

Vadinasi, mažiausia reiškinio reikšmė yra -2, įgyjama, kai $x = 1$.

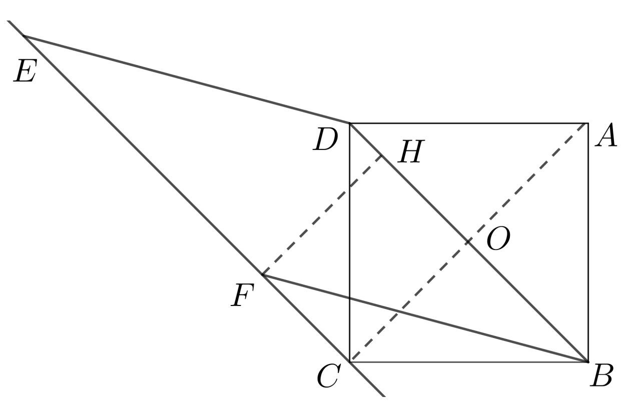
2. Ats. $2:3$.

Tarkime, kad policininkas uždavė klausimą: teisuoliui apie teisuolį – a_{tt} kartų, teisuoliui apie melagį – a_{tm} kartų, melagiui apie teisuolį – a_{mt} kartų, melagiui apie melagį – a_{mm} kartų.

Salą paliko $a_{tm}+a_{mt}$ žmonių, o liko $a_{tt}+a_{mm}$ gyventojų: a_{tt} teisuolių ir a_{mm} melagių. Tada $a_{mm} = 3a_{tt}$. Melagių pradžioje buvo, viena vertus, $a_{mt}+a_{mm}$ (kiekvienas melagis gavo vieną klausimą), o kita vertus, $a_{tm} + a_{mm}$ (apie kiekvieną melagį užduotas vienas klausimas). Todėl $a_{mt} = a_{tm}$. Be to, išvarytų žmonių skaičius ir pradinis melagių skaičius saloje sutampa: $a_{tm} + a_{mt} = a_{mt} + a_{mm}$. Todėl $a_{mm} = a_{tm} = a_{mt}$.

Pradinis melagių skaičius lygus $y = a_{mt} + a_{mm} = 2a_{mm} = 6a_{tt}$, o pradinis teisuolių skaičius lygus $x = a_{tt} + a_{tm} = a_{tt} + a_{mm} = 4a_{tt}$. Vadinasi, $x : y = 4 : 6 = 2 : 3$.

3. Ats. $15°$.



Kvadrato statmenų įstrižainių ilgį pažymėkime $2x = AC = BD$, o jų sankirtos tašką – O. Tada $OA = OB = OC = OD = x$. Iš F į tiesę BD nuleiskime rombo aukštinę FH. Tada abi atkarpos FH ir CO yra statmenys, nuleisti iš tiesės FE taškų į lygiagrečią tiesę BD, jų ilgiai lygūs atstumui tarp šių lygiagrečių tiesių: $FH = CO = x$. Rombo kraštinės lygios: $BF = BD = 2x$. Stačiajame trikampyje BHF turime $FH : FB = x : 2x = 1 : 2$, todėl $\angle FBH = 30°$. Kampas CBD tarp kvadrato kraštinės ir įstrižainės lygus 45°, todėl $\angle CBF = \angle CBD - \angle FBH = 15°$.

4. Ats. 6.

Skaičiaus $M - N$ vienas skaitmuo lygus 2, o kiti skaitmenys nelyginiai. Kadangi $M - N = 2N$ yra lyginis skaičius, tai vienintelis lyginis skaitmuo 2 turi būti šio skaičiaus paskutinis skaitmuo. Skaičius $2N$ baigiasi skaitmeniu 2, tik jei N baigiasi skaitmeniu 1 arba 6.

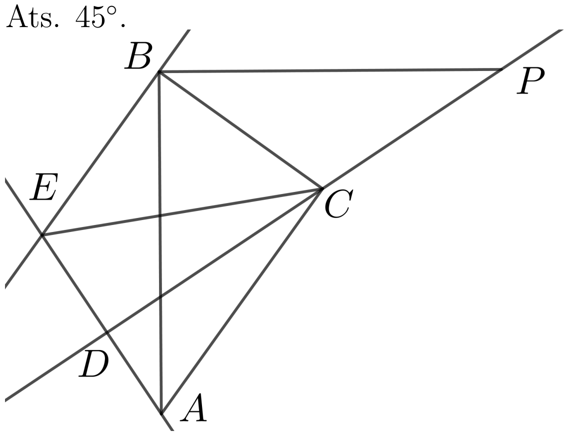
Jei N paskutinis skaitmuo yra 1, o priešpaskutinis skaitmuo yra x, tai daugindami N iš 2 stulpeliu, gautume skaičiaus $2N$ paskutinį skaitmenį $1 \cdot 2 = 2$, o tada priešpaskutinį skaitmenį kaip skaičiaus $2x$ paskutinį skaitmenį, kuris būtų lyginis. Tačiau $2N$ visi skaitmenys, išskyrus paskutinį skaitmenį 2, yra nelyginiai. Vadinasi, N tegali baigtis skaitmeniu 6. Ši reikšmė yra galima: tinka $N = 16$ ir $M = 48$.

X klasė

1. Žr. IX klasės 1 uždavinio sprendimą.

2. Žr. IX klasės 2 uždavinio sprendimą.

3. Ats. 45°.



Visų pirma, $\angle PBC = 90° - \angle CBA = \angle ABE$. Kampų BPC ir BAE atitinkamos kraštinės stamenos, todėl jie lygūs. Be to, $BP = BA$. Vadinasi, trikampiai BCP ir BEA lygūs pagal kraštinę ir du kampus prie jos. Tada $BC = BE$, o trikampis BCE yra statusis ir lygiašonis. Todėl jo kampas BCE lygus 45°.

4. Ats. $n = p^5$, kur p – bet koks pirminis skaičius, arba $n = pq^2$, kur p ir q – bet kokie skirtingi pirminiai skaičiai.

Kiekvieną skaičiaus n teigiamą daliklį $d < \sqrt{n}$ atitinka toks daliklis $d_1 = \frac{n}{d} > \sqrt{n}$, kad $dd_1 = n$, ir atvirkščiai. Todėl visus n teigiamus daliklius, nelygius $\sqrt{n}$, galima suskirstyti į poras (d, d_1), kur $d < \sqrt{n}$, $d_1 > \sqrt{n}$ ir $dd_1 = n$. Be poros gali likti nebent skaičius $\sqrt{n}$ (jei jis sveikasis). Jei turime k tokių porų, tai n teigiamų daliklių sandauga lygi n^k arba $n^k \cdot \sqrt{n}$ (kai $\sqrt{n}$ yra daliklis). Ji lygi n^3 tik tada, kai $k = 3$, o $\sqrt{n}$ nėra daliklis. Tada n turi $2k = 6$ teigiamus daliklius.

Jei n skaidinys pirminiais daugikliais yra $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ (čia $p_1, \dots, p_k$ yra skirtingi pirminiai skaičiai, o $a_1, \dots, a_k$ yra natūralieji skaičiai), tai n teigiami dalikliai yra visi skaičiai $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$, kur kiekvienas b_i yra vienas iš skaičių $0, 1, \dots, a_i$. Kiekvienas b_i gali įgyti $a_i + 1$ reikšmių, todėl iš viso teigiamų daliklių yra

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1) = 6.$$

Jei $k \geqslant 3$, tai $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1) \geqslant (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) > 6$. Todėl $k = 1$ arba $k = 2$.

Pirmuoju atveju $a_1 + 1 = 6$ ir $n = p_1^{a_1} = p_1^5$. Antruoju atveju galime nemažindami bendrumo laikyti, kad $a_1 \leqslant a_2$. Kadangi $(a_1 + 1)(a_2 + 1) = 6$, tai tinka tik $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ir $n = p_1 \cdot p_2^2$.

Abi išraiškos tenkina sąlygą bet kokiems skirtingiems pirminiams skaičiams p_1 ir p_2. Pirmuoju atveju daliklių sandauga lygi $1 \cdot p_1 \cdot p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_1^5 = p_1^{15} = n^3$, o antruoju – $1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 p_2 \cdot p_2^2 \cdot p_1 p_2^2 = p_1^3 p_2^6 = n^3$.

XI ir XII klasės

1. Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę

$$\sqrt{x_2 x_3} \leqslant \frac{x_2 + x_3}{2} \quad \text{ir} \quad x_1^2 + x_2 x_3 \geqslant 2x_1 \sqrt{x_2 x_3},$$

todėl

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2 x_3} = \frac{x_1^3 + x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2 x_3} = x_1 - \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2 x_3} \geqslant$$

$$\geqslant x_1 - \frac{x_1 x_2 x_3}{2x_1 \sqrt{x_2 x_3}} = x_1 - \frac{\sqrt{x_2 x_3}}{2} \geqslant x_1 - \frac{x_2 + x_3}{4}.$$

Analogiškai $\frac{x_2^3}{x_2^2 + x_3 x_4} \geqslant x_2 - \frac{x_3 + x_4}{4}$, $\frac{x_3^3}{x_3^2 + x_4 x_1} \geqslant x_3 - \frac{x_4 + x_1}{4}$ ir $\frac{x_4^3}{x_4^2 + x_1 x_2} \geqslant x_4 - \frac{x_1 + x_2}{4}$. Todėl kairioji duotosios nelygybės pusė yra ne mažesnė nei

$$x_1 - \frac{x_2 + x_3}{4} + x_2 - \frac{x_3 + x_4}{4} + x_3 - \frac{x_4 + x_1}{4} + x_4 - \frac{x_1 + x_2}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Įrodyta.

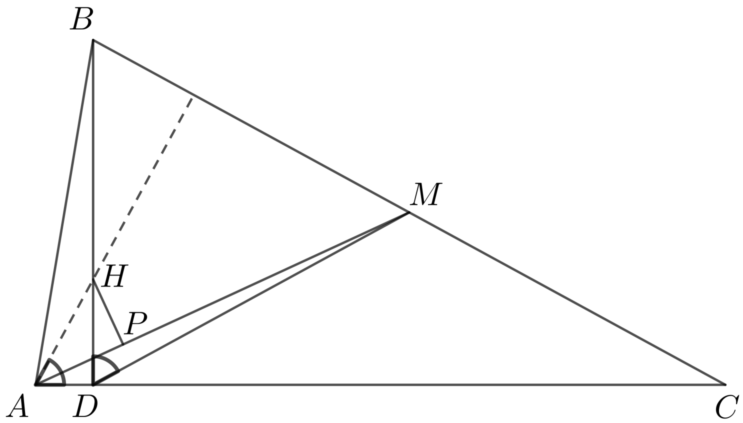
2. Ats. $n = 11$.

Kiekviename stulpelyje yra po 5 skaičius, todėl stulpelio skaičių suma yra sveikasis skaičius tarp $0+0+0+0+0=0$ ir $2+2+2+2+2=10$. Iš viso turime 11 galimų skirtingų reikšmių $0, 1, \ldots, 10$, todėl $n \leqslant 11$.

Reikšmė $n = 11$ galima (žr. pav.), todėl ji ir yra didžiausia.

0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2
0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

3. Trikampio ABC aukštinė BD eina per tašką H.



Kadangi kampai ADH ir APH statieji, tai taškai A, D, H, P priklauso vienam apskritimui c. Stačiajame trikampyje BCD turime $\angle CBD = 90° - \angle BCD = 90° - \angle BCA$. Analogiškai nagrinėdami kitą aukštinę, gauname $\angle DAH = 90° - \angle BCA$. Kadangi M yra trikampio BCD įžambinės vidurio taškas, tai jis yra šio trikampio apibrėžtinio apskritimo centras ir $MB = MC = MD$. Trikampis BMD lygiašonis ir $\angle MDB = \angle MBD = 90° - \angle BCA = \angle DAH$. Tada tiesė DM yra apskritimo c liestinė (ribinis įbrėžtinių kampų, besiremiančių į tą patį lanką, atvejis). Pagal liestinės ir kirstinės savybę $MA \cdot MP = MD^2 = MB^2$.

Įrodyta.

4. Ats. $p = 7$.

Kadangi $p^2+1 > p+1$, tai $y > x$. Atimkime vieną lygtį iš kitos: $p^2 - p = 2y^2 - 2x^2 = 2(x+y)(y-x)$. Tada $2(x+y)(y-x)$ dalijasi iš p. Jei $p = 2$, tai $2x^2 = p+1 = 3$ nėra lyginis skaičius. Todėl $p \neq 2$ ir vienas iš natūraliųjų skaičių $y - x$ bei $x + y$ dalijasi iš pirminio p.

Pirmuoju atveju $y - x \geqslant p$. Tačiau tada $x + y > p$ ir $2(x+y)(y-x) > 2p^2 > p^2 - p$. Todėl $x + y$ dalijasi iš p. Jei $x + y \geqslant 2p$, tai $y \geqslant 2p : 2 = p$ ir $p^2 + 1 = 2y^2 \geqslant 2p^2$. Todėl $x + y < 2p$ ir lieka vienintelė galimybė: $x + y = p$.

Tada $p^2 - p = 2(y-x)p$ ir $y - x = \frac{p-1}{2}$, o $4x = 2((x+y) - (y-x)) = p + 1 = 2x^2$. Vadinasi, $x = 2$, $p + 1 = 2x^2 = 8$ ir $p = 7$. Galime rasti ir $y = 5$. Sprendinys $p = 7$, $x = 2$, $y = 5$ tenkina uždavinio sąlygą.