AŠTUONIOLIKTOJI KALĖDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2017-12-12

Sprendimai

Parengė Romualdas Kašuba

Individualioji olimpiada

1. Žr. 7-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
2. Žr. 8-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
3. Žr. 10-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
4. Žr. 9-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
5. Žr. 4-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.

Komandinė olimpiada

1. Pirmiausiai pastebėkime, kad lentelėje 4×4 yra 9 skirtingi 2×2 kvadratai, todėl dviejų skirtingų skaičių pildant lentelę tikrai nepakaks, nes pildant lentelę tik su dviem skirtingais skaičiais a ir b, visų skaičių sumos tuose kvadratuose 2×2 gali įgyti tik 5 skirtingas reikšmes (o reikėtų 9): $4a$, $3a+b$, $2a+2b$, $a+3b$, $4b$.
Todėl reikės panaudoti bent 3 skirtingus skaičius.
Žemiau pateiktas pavyzdys su įrašomais skaičiais 0, 1 ir 2 demonstruoja, kad tai yra įmanoma.

0	0	0	0
0	0	1	1
2	1	2	2
0	2	2	2

Tuo būdu įsitikiname, kad mažų mažiausiai reikia ir pakanka trijų skirtingų skaičių, ir todėl teisingas yra atsakymas D.
Atsakymas
Galima išsiversti su vos trimis skirtingais skaičiais. Atsakymas D.

2. Pirmiausiai Mokytojas Vidas, kaip ir dauguma jo vaikų, iš karto pastebėjo keletą paprastų dalykų. Pirmiausiai jie pasakė, kad jei jau skaičius dalijasi iš 9, tai jo skaitmenų suma irgi dalijasi iš 9 (ir tiktai tada).
Todėl jei padalijus iš 9 gautoji skaičių suma sumažėjo 9 vienetais, lyginant ją su pradinio dalijamojo skaičiaus skaitmenų suma, kuri dalijosi iš 9, tai sumažėjusi 9 vienetais dalmens skaitmenų suma taip pat dalijasi iš 9, vadinasi, iš 9 dalijasi ir gautasi dalmuo. Vadinasi, dalijamasis skaičius yra iš tų skaičių, kurie iš 9 dalinasi bent 2 kartus, arba tokių, kurie dalijasi iš $9 \cdot 9 = 81$.
O tokių skaičių yra visai nedaug ir visus tokius triženklius ir iš 81 besidalijančius skaičius mes tiesiog visus peržiūrėsime.
Pats mažiausias iš 81 besidalijantis 3-ženklis skaičius yra

$$81 \cdot 2 = 162,$$

toliau eitų 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891 ir 972.

Skaičių-kandidatų skaitmenų sumos yra 9, 9, 9, 9, 18, 18, 18, 18, 9, 18 ir 18.
Akivaizdu, kad pirmieji 4 kandidatai „atkrenta“, kaip ir 9-asis kandidatas, nes 9 sumažėjusi dalmens skaitmenų suma nuliui būti lygi na jau niekaip negalėtų.
Todėl gali tikti nebent tik kas nors iš likusių skaičių

486, 567, 648, 729, 891 ir 972.

Padaliję iš 9 gautume skaičius

54, 63, 72, 81, 99 ir 108.

Matome, kad turėsime atmesti dar ir skaičių 891 ir mokytojui Vidui su mokiniais liks lygiai 5 skaičiai 486, 567, 648, 729 ir 972, todėl teisingas atsakymas yra 5 skaičiai arba atsakymas B.
Atsakymas
Yra 5 tokie triženkliai skaičiai. Atsakymas B.

3. Priminkime, kad mūsų du 5-ženkliai skaičiai turi būti užrašomi išimtinai tik skaitmenimis 1, 2 ir 3, bet dalintis iš 2 bei iš 3 jiems neleidžiama, be to, visi išvardinti skaitmenys turi bent po kartą „pasitaikyti“ kiekviename tokiame 5-ženkliame skaičiuje.
Surasti patį mažiausią tokį skaičių tikrai paprasta, nes prašyte besiprašantis skaičius

11123

tikrai tinka, o mažesnio už jį skaičiaus, kuriame pasitaikytų visi trys minėti skaitmenys, nėra.
Tikrai šis skaičius nesidalija iš 2-jų, nes jis nelyginis, o iš 3-jų nesidalija todėl, kad iš 3-jų nesidalija jo skaitmenų suma, kuri yra

$$1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 8.$$

Pereiname prie didžiausiojo tokio skaičiaus paieškų.
Dabar prašyte besiprašantis skaičius (didžiausias, tenkinantis pirmąsias dvi iš trijų sąlygų)

33321

netinka, nes jis dalijasi iš 3, todėl jį teks truputį sumažinti. Netinka ir kitas skaičius, prasidedantis 333..., o būtent skaičius 33312. Toliau tikrinkime skaičius 332...: vienas iš likusių dviejų skaitmenų turi būti 1, o kitas negali būti 3 (tada ir vėl skaičius dalytųsi iš 3), todėl negausime didesnio skaičiaus nei

33221,

kuris, kaip regime, tenkina visas sąlygas.
Liko suskaičiuoti skirtumą, kuris yra

$$33221 - 11123 = 22098$$

Ir pamatyti, kad tai yra atsakymas D.
Atsakymas
Didžiausias skirtumas yra 22098, arba D.

4. Pastebėkime, kad kiekvienoje eilutėje ar stulpelyje du kraštiniai skaičiai turi tiesiog sutapti. Tikrai, tarp bet kurios eilutės kraštinių langelių yra „įsiterpę“ lygiai du langeliai, kurių skaičius sudėjus su vienu ar kitu kraštiniu skaičiumi gaunama ta pati suma, todėl lygūs turi būti ir kraštiniai skaičiai.
Pradinėje lentelėje

		5	
4			
	?		2
3			

kraštinis yra, pavyzdžiui, skaičius 2 antroje (nuo viršaus) eilutėje, todėl ir kitame krašte irgi turi būti 4 ir lentelę galima papildyti:

		5	
4			4
	?		2
3			

Lygiai tą patį galime padaryti ir su ketvirtos eilutės 3-tu, trečios eilutės 2-tu, trečio (iš kairės) stulpelio 5-tu, pirmo stulpelio 3-tu, o tada ir su ketvirtame stulpelyje atsiradusiu 3-tu:

3		5	3
4			4
2	?		2
3		5	3

Pirmoje eilutėje pirmojo, antrojo ir trečiojo skaičiaus sumos turi būti lygios 9, nes mūsų lentelėje jau atsirado trys žinomi iš eilės einantys langeliai (pavyzdžiui, pirmame stulpelyje 3, 4 ir 2), vadinasi, ta visur vienoda trijų langelių suma yra 9.
Nežinomas antrasis skaičius pirmoje eilutėje turi būti 1, nes pridėję jo kaimynus 3 ir 5 turime gauti iš viso 9. Įrašome jį į lentelę, o kartu ir to paties stulpelio apačioje:

3	1	5	3
4			4
2	?		2
3	1	5	3

Suradome visus kraštinius lentelės elementus ir dabar jau turėsime „skverbtis“ į lentelės vidų. Pamėginsime ? vietoje parašyti konkretų skaičių ir pasižiūrėsime, kam jis galėtų būti lygus (primename, kad į lentelę rašome natūraliuosius skaičius).
Jeigu pabandytume imti 1, tai

3	1	5	3
4			4
2	1		2
3	1	5	3

antrame stulpelyje dėl 9-iems lygios sumos turėtų atsirasti 7

3	1	5	3
4	7	X	4
2	1		2
3	1	5	3

Tada toliau antroje eilutėje turėtume rašyti X = –2, o to daryti negalime.
Analogiškai gaunama prieštara, patikrinus ? = 2 ir ? = 3:

3	1	5	3
4	6	-1	4
2	2		2
3	1	5	3

ir

3	1	5	3
4	5	0	4
2	3		2
3	1	5	3

Tęsiame su ? = 4, 5 ir 6:

3	1	5	3
4	4	1	4
2	4	3	2
3	1	5	3

3	1	5	3
4	3	2	4
2	5	2	2
3	1	5	3

3	1	5	3
4	2	3	4
2	6	1	2
3	1	5	3

Matome, kad lentelės užpildytos taip, kaip reikalaujama.
Su $? > 6$ lentelė neužpildoma natūraliaisiais skaičiais, nes gautume, kad $2 + ? + Y = 9$ ir $Y = 7 - ? < 1$:

3	1	5	3
4			4
2	?	Y	2
3	1	5	3

Taigi turime iš viso tris galimybes: $? = 4$, 5 arba 6, ir todėl renkamės atsakymą D.

Atsakymas

Kadangi ? galime pakeisti trimis skaičiais, tai teisingas atsakymas yra D.

5. Iš sąlygos mes patiriame, kad Girkalnio berniukas Girmantas elgiasi taip: jis ima 4-ženklį skaičių

$$ABCD.$$

ir nukelia į galą jo tūkstančių skaitmenį A. Tai padaręs jis, žinoma, gauna skaičių BCDA, o tada jau skaičiuoja sumą

$$ABCD + BCDA.$$

Kurį vieną iš atsakymuose paminėtų skaičių jis tikrai galėtų gauti taip darydamas?
Pasižiūrėję į sumą dar kartą, mes abiejuose dėmenyse regime pasikartojant nemenką fragmentą BCD. Pamėginsime jį atskirti.
Todėl ir rašome
$ABCD + BCDA = A000 + BCD + BCD0 + A = 1000 \cdot A + BCD + 10 \cdot BCD + A = 1001 \cdot A + 11 \cdot BCD.$
Dabar pastebėję arba prisiminę, kad 1001 dalijasi iš 11, darome išvadą, kad ieškoma suma taip pat dalijasi 11.
Tačiau nei 4929, nei 7314, nei 2017, nei 9753 iš 11 nesidalija ir todėl tokia suma niekaip neišreiškiami.
Tuo tarpu

$$4587$$

iš 11 dalijasi ir tikrai, matyt, gali būti taip užrašomas.
Tikrai, mėgindami baigti darbą, mes viską sulyginame ir gauname, kad tada

$$1001 \cdot A + 11 \cdot BCD = 4587$$

Imdami, sakysime, $A = 3$, gautume

$$3003 + 11 \cdot BCD = 4587,$$

ir

$$11 \cdot BCD = 1584,$$

iš kur $BCD = 1584 : 11 = 144.$
Radome, kad toks pradinis skaičius gali būti 3144, nes tikrai

$$3144 + 1443 = 4587.$$

Todėl Girkalnio berniukas Girmantas neišsiblaškęs buvo tik pačioje pabaigoje ir teisingas atsakymas yra E.

Atsakymas

Girkalnio berniukas tikrai tegalėjo gauti skaičių tik 4587, arba teisingas atsakymas yra E.

6. Per 24 valandas yra 6 pilnos valandos, iš jų 4 valandos einančios iš eilės, kai vienas valandų skaitmuo yra „stabiliai“ 2, tai būtų laikas nuo 02:00 iki 03:00 (ištisa viena valanda), nuo 12:00 iki 13:00 (dar kita ištisa valanda) ir 4 valandos iš eilės nuo 20:00 iki pat 00:00.

Per likusias 18 valandų suskaičiuosime laiką, kai 2-tą rodo jau tik minučių rodyklė. Tokio laiko kiekvienoje valandoje prisirenka lygiai 15 minučių, kiekvieną valandą nuo 02 iki pat 03 minutės, toliau nuo 12 iki pat 13 minutės, toliau ištisai nuo 20 iki 30 minutės (ištisos 10 minučių), toliau dar 3 minutės, po minutę tarp 32 ir 33, 42 ir 43 bei tarp 52 ir 53 minučių – taigi tikrai per kiekvieną valandą po 15 minučių.

Taigi per likusias 18 valandų prisirinks

$$18 \cdot 15 = 270$$

papildomų minučių laiko, kai rodomu bent vienu dvejetu pajėgs pasirūpinti minučių skaitmuo arba, kaip dabar jau vis dažniau pasako, minučių rodmuo.

Taip prie 6 valandų pridėję tas 4 valandas ir 30 minučių ir gausime teisingą atsakymą, kuris yra 10 val. ir 30 min. ir kuris pas mus yra paženklintas raide C.

Atsakymas

Per parą prisirenka lygiai 10 valandų ir dar 30 minučių tokio laiko, kai bent vienas elektroninio laikrodžio valandos ar minutės rodmuo (pradedant 00: 00 ir baigiant 23:59) yra 2. Atsakymas C.

7. Nesunku suvokti, kad, sakysime, laisvasis narys bus lygus visų skaičių nuo 1 iki 6 sandaugai, kuri lygi

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720.$$

Tuo tarpu norint gauti x pirmuoju laipsniu, iš kiekvieno dvinario $x + 1$, ..., $x + 6$ reikia imti po narį, lygų skaičiui, išskyrus vieną dvinarį, iš kurio reikia imti narį x, ir šiuos 6 narius sudauginti. Todėl koeficientą prie x gausime, sumuodami visas sandaugas, kurios gaunamos iš sandaugos

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$$

paeiliui išbraukant po vieną daugiklį. Koeficientas prie x pirmuoju laipsniu yra lygus sumai

$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 =$$

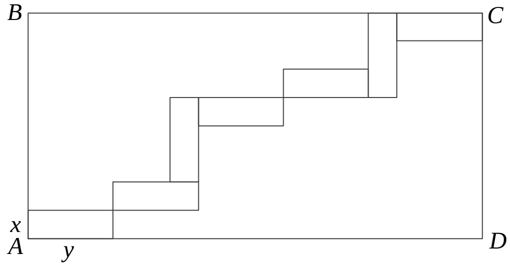
$$= 720 + 720 : 2 + 720 : 3 + 720 : 4 + 720 : 5 + 720 : 6 = 720 + 360 + 240 + 180 + 144 + 120 = 1764.$$

Taigi teisingas atsakymas yra A, kurį ir renkamės.

Atsakymas

Koeficientas prie x pirmuoju laipsniu yra 1764, arba A.

8. Sakykime, kad mažesnioji stačiakampiuko kraštinė yra lygi x, o didesnioji – y. Tada, kaip matome iš brėžinio,



$$AB = x + x + y + y = 2x + 2y,$$

o

$$AD = y + y + y + y + x + y = 5y + x.$$

Kadangi

$$2AB = AD,$$

tai

$$4x + 4y = 5y + x,$$

Iš kur išplaukia, kad

$$y = 3x.$$

Todėl

$$AB = 2y + 2x = 8x$$

ir

$$AD = 5y + x = 16x.$$

Todėl pradinio stačiakampio plotas

$$S = AB \cdot AD = 128x^2,$$

o stačiakampiuko plotas

$$s = xy = 3x^2.$$

Tokiu būdu

$$S : s = 128 : 3$$

ir teisingas yra atsakymas A.

Atsakymas

Pradinio stačiakampio plotas yra 128/3 kartų didesnis už stačiakampiuko plotą. Atsakymas A.

9. Jeigu x yra pirmosios, y – antrosios, o z – trečiosios brigados paruoštas medienos kiekis, tai iš sąlygos turime, kad

$$x + z = 2y$$

ir

$$y + z = 3x.$$

Prie abiejų pirmosios lygybės pusių pridėdami po y, o prie antrosios – po x, gausime

$$x + y + z = 3y = 4x.$$

Lygybė

$$3y = 4x$$

neabejotinai reiškia, kad

$$y > x.$$

Pasižiūrėję į lygybę

$$x + z = 2y,$$

užrašytą forma

$$x + z = y + y,$$

ir nepamiršdami, kad $y > x$, tuojau suprantame, kad tada būtinai

$$z > y.$$

Todėl galutinai

$$z > y > x,$$

o tai ir reiškia, kad daugiausiai medienos paruošė trečioji brigada arba kad teisingas atsakymas yra C.

Atsakymas
Daugiausiai medienos paruošė trečioji brigada, arba atsakymas C.

10. Kadangi mūsų 10-ženklio skaičiaus pirmasis skaitmuo yra 1 (kitaip jis nebūtų 10-ženklis), o jo pirmojo, trečiojo, penktojo, septintojo ir devintojo skaitmenų suma yra lygi jo antrojo, ketvirtojo, šeštojo, aštuntojo ir dešimtojo skaitmenų sumai, o dėliojame mes nulius ir vienetus, tai tos sutampančios sumos gali būti lygios 1, 2, 3, 4 arba 5.
Panagrinėsime visus šiuos atvejus iš eilės.
Jeigu abi sumos lygios 1, tai tada nelyginėse vietose esantys skaitmenys yra iš eilės 1, 0, 0, 0, 0 ir lygiai vienoje iš penkių lyginių vietų turi pasirodyti vienetukas, o tam yra 5 galimybės.
Toliau žiūrime, kada abi nagrinėjamos sumos yra lygios 2. Tada, kadangi pirmasis 10-ženklio skaičiaus skaitmuo yra būtinai 1, tai kitas vienetas gali pasirodyti bet kurioje iš 4-ių likusių nelyginių vietų (4 galimybės), o penkiose lyginėse vietose turi pasirodyti 2 vienetukai.
Pastebėsime, kad į 2 laisvas vietas (iš 5) įrašyti po vienetą galime $C_5^2 = 10$-čia būdų (patikrinkite).
Todėl, remiantis kombinatoriniu daugybos principu (arba, kitaip tariant, sveiku protu ar šiaip sumanumu), matome, kad turėsime

$$4 \cdot 10 = 40$$

būdų parinkti tokį skaičių, kurio lyginių ir nelyginių vietų skaitmenų sumos sutampa ir abi yra lygios 2.
Pereiname prie atvejo, kai abi sumos sutampa ir yra lygios 3.
Kadangi pirmasis skaitmuo (visada) 1, tai likusiose keturiose nelyginėse vietose turime pasirinkti du vienetus, o tam yra 6 būdai (paprasčiausia būtų tiesiog perrinkti), gi 5-iose nelyginėse vietose turime turėti 3 vienetukus, o tam yra $C_5^2 = 10$ būdų (patikrinkite).
Remiantis tuo pačiu kombinatorinės daugybos principu, turėsime iš viso

$$6 \cdot 10 = 60$$

būdų.
Toliau žiūrime, kad abi sutampančios sumos būtų po 4.
Kadangi pirmasis skaitmuo nepajudinamai 1, tai likusiose 4 nelyginėse vietose reikia surinkti 3, o tam yra 4 būdai, gi lyginėse vietose 4 vienetus galime įrašinėti į 5 laisvas vietas ir tam akivaizdžiai turime 5 būdus.
Taigi iš viso turime

$$4 \cdot 5 = 20$$

būdų.
Liko sutampančios sumos, kurios būtų po 5. Toks atvejis yra vienintelis – tai 10-ženklis skaičius

$$1\,111\,111\,111.$$

Vadinasi, iš viso turėsime

$$5 + 40 + 60 + 20 + 1 = 126$$

būdus tokiems 10-ženkliams skaičiams parinkti, o tai reiškia atsakymą B.

Atsakymas
Yra 126 būdai parinkti 10-ženklį skaičių, arba teisingas yra atsakymas B.