XIII SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA
Marijampolė, 2017-12-08

Sprendimai

1. Taigi uždavinyje Mokytojas Beinakaraitis keičia 1-tu patį didžiausią skaitmenį.
Tas didžiausias skaitmuo gali būti vienetų skaitmuo ir pakeitęs tą skaitmenį Mokytojas gaus skaičių, kuris baigiasi vienetu ir todėl iš 30 nieku gyvu nesidalija.
Toliau mes suprantame, jog keisdamas dešimčių arba šimtų skaitmenis, jei jau jie yra patys didžiausi to skaičiaus skaitmenys, Mokytojas turi imti jau tik nuliu besibaigiančius skaičius.
Jei toks pats didžiausias skaitmuo dabar būtų dešimčių skaitmuo, tai pakeitęs tą skaitmenį vienetu, Mokytojas gaus besidalijantį iš 30 skaičių išimtinai tiktai tada, kai po pakeitimo jis turės arba skaičių 210, arba 510, arba 810, nes dalyba iš 30-ties reiškia baigimąsi 0 ir, žinoma, skaitmenų sumos dalumą iš 3.
Skaičių 210 Mokytojas gali gauti iš skaičių 230, 240, 250, 260, 270, 280 ir 290 (iš viso 7 atvejai), skaičių 510 jis gautų imdamas skaičius 560, 570, 580 ir 590 (iš viso 4 atvejai), o 810 jis tegautų vieninteliu būdu, „auklėdamas“ skaičių 890.
Taigi su „redukuojamu“ 10-čių skaitmeniu iš viso galimi

$$7 + 4 + 1 = 12$$

atvejai.
Liko atvejis, kai didžiausias skaitmuo yra šimtų skaitmuo, tada po šimtų skaičiaus pakeitimo gautasis skaičius dalinsis iš 30 išimtinai tiktai tada, kai gausime arba 120, arba 150, arba galiausiai 180.
Vėl nuosekliai skaičiuojame kartu su Mokytoju: 120 gautume mažindami skaičius 320, 420, 520, 620, 720, 820 ir 920 (7 atvejai), skaičių 150 gautume mažindami skaičius 650, 750, 850 ir 950 (4 atvejai); galiausiai skaičių 180 gauname vieninteliu būdu iš skaičiaus 980.
Taigi ir šimtų skaitmens atveju turime

$$7 + 4 + 1 = 12,$$

atvejų, arba iš viso

$$12 + 12 = 24$$

tokius 3-ženklius skirtingaskaitmenius skaičius.
Atsakymas
A) Mokytojas Beinakaraitis galėjo būti pasirinkęs, pavyzdžiui, patį didžiausią iš visų tokių triženklių skaičių, kuriuo būtų skaičius 980.
B) Tokių skaičių esama 24-ių.

2. Sudėję 15 pačių mažiausių skaičių, kuriais yra pirmieji 15 minimų skaičių 1, 2, 3, ..., 13, 14 ir 15 gautume 1+2+3+....+13+14+15 = 120. Todėl 15 pačių didžiausių skaičių turėtų „sunešti“ mažiausiai trigubai daugiau, arba

$$120 \cdot 3 = 360.$$

Kita vertus, 15 pačių didžiausiųjų skaičių suma yra

$$17 + 18 + 19 +.. + 29 + 30 + 31 = ((17 + 31)/2) \cdot 15 = 24 \cdot 15 = 360.$$

Taigi matome, kad norėdami padaryti taip, kaip mūsų prašo uždavinio sąlyga, mes tegalėtume imti tik pirmuosius 15 skaičių 1, 2, 3, ..., 13, 14, 15 su didžiausiaisiais 15 skaičių 17, 18, 19, ..., 29, 30 ir 31.
Tačiau tai reikštų, jog nepaimtuoju skaičiumi tegali likti vidurinysis rinkinio skaičius, kuriuo yra 16.

Atsakymas
Nepaimtąja kortele tegali būti kortelė su skaičiumi 16 ir ši galimybė yra vienintelis įmanomas būdas paimti po 15 skaičių taip, kaip prašo uždavinio sąlyga.

3. A) Pirmiausiai susiraskime skaičių, prie kurio pridėjus 2017 gauname 10 000. Tokiu skaičiumi yra skaičius

$$10000 - 2017 = 7983.$$

Mes tvirtiname, kad skaičius 7983 yra Gelgaudiškio skaičius ir pamėginkime pažymėti jį raide m, kuria sąlygoje buvo žymimi Gelgaudiškio skaičiai.
Liko surasti jam skirtą skaičių N.
Tokiu skaičiumi galėtų būti 7987-ženklis skaičius, kurio pirmieji 7983 skaitmenys yra vienetai, o paskutinieji 4 skaitmenys yra nuliai, arba skaičius

1111......111110000.

Tikrai jo skaitmenų suma yra lygi 7983 vienetų sumai ir yra lygi, suprantama, 7983.
Toliau, tas ilgasis 7987 skaičius

1111......111110000

tikrai dalijasi iš skaičiaus

$$7983 + 2017 = 10000.$$

Beliko tik pastebėti, kad skaičius 7983 tikrai didesnis už 1000.
B) Dabar norėtume pasinaudoti tuo, kad 10 yra lyginis skaičius, arba, kitaip sakant, dalijasi iš 2. Todėl 100 dalijasi iš 4, 1000 dalijasi iš 8, 10 000 dalijasi iš 16, 100 000 dalijasi iš 32 ir taip toliau.
Todėl skaičius su 10 nulių arba skaičius

10 000 000 000

dalijasi iš dešimties 2-tų sandaugos, arba iš skaičiaus 1024, o skaičius

100 000 000 000

dalijasi iš vienuolikos 2-tų sandaugos arba iš du kartus už skaičių 1024 didesnio skaičiaus 2048.
Kitaip sakant, mes paaiškinome, jog ir bet kuris vienuolika nulių besibaigiantis skaičius visada dalijasi iš vienuolikos 2-tų sandaugos, arba „du vienuoliktu laipsniu“, arba skaičiaus 2048.
Dabar suraskime skaičių, prie kurio pridėjus 2017 gautume tuos 2048. Tokiu skaičiumi, suprantama, yra skaičius 31, nes

$$31 + 2017 = 2048.$$

Mes sakome, kad skaičius 31 irgi yra Gelgaudiškio skaičius. Pirmiausiai pastebėkime, kad jis tikrai mažesnis už 100.
Liko jam, kaip skaičiui m, nurodyti „jam skirtą“ skaičių N. Tokiu skaičiumi, pavyzdžiui, galės būti jau tik 15-ženklis skaičius, kurio pirmasis skaitmuo yra 4, toliau eina trys devyniukės 999, o visi kiti likusieji 11 skaitmenų yra nuliai, arba skaičius

499 900 000 000 000.

Šis skaičius tinka, nes jo skaitmenų suma yra lygi

$$4 + 9 + 9 + 9 = 31$$

ir jis, kaip kiekvienas 11-ka nulių besibaigiantis skaičius, dalijasi iš 2 vienuoliktu laipsniu, arba iš 2048, kuris yra lygus $31 + 2017 = m + 2017$, kaip ir prašo uždavinio sąlyga.
Atsakymas
A) Pavyzdžiui, 7983;
B) Pavyzdžiui, 31.

4. Dėl galimų techninių patogumų langelių dažymą juoda spalva pakeisime baltų ir juodų šaškių dėlionėmis.

Kadangi viršutinėje eilutėje visos šaškės juodos, tai ji jokių problemų nekelia ir mes ją galime pusiau primiršti ir net nevaizduoti. Ne visada vaizduosime ir kraštinius 2 stulpelius, taigi dalį darbo atliksime lentelės dalyje 3 × 4 ir net jos centrinėje dalyje 3 × 2.

Joje galima perrinkti visas dėliones, kai stulpeliai yra su tuo pačiu juodųjų šaškių skaičiumi (žymėsime jas J, o baltąsias - B).

Suprantama, kad be viršutinės eilutės, kur visos šaškės buvo juodos ir kurios dabar nevaizduojame, viduriniuose stulpeliuose gali būti po 2 juodas šaškes arba po 1 (ir negali būti po 3 arba 0, nes tai reikštų bent 2 juodas šaškes apatinėje eilutėje arba tik 2 toje, kur turi būti 3). Tokias dėliones atitinkamai vadinsime dvišaškėmis ir vienšaškėmis.

Dabar išnagrinėsime visus įmanomus juodų šaškių buvimo viduriniuose stulpeliuose atvejus.

Iš pradžių dvišaškės dėlionės.

1) Paskutinėje eilutėje abi šaškės baltos:

J	J
J	J
B	B

Ši situacija iki pilnos lentelės gali būti pratęsta 4 būdais, nes viršutinė eilutė gali būti pratęsta 2, vidurinė 1, o apatinė – vėl 2 būdais, iš viso $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ būdais.

2) Paskutinėje eilutėje kairioji šaškė balta, o dešinioji juoda:

J	J
J	B
B	J

Vėl 4 būdai. Arba:

J	B
J	J
B	J

Vieninteliu būdu galima taip užpildyti. Iš viso gavome 4+1=5 būdus.

3) Paskutinėje eilutėje kairioji šaškė juoda, o dešinioji balta. Šis atvejis simetriškas atvejui 2), todėl ir čia bus 5 būdai.

4) Paskutinėje eilutėje abi šaškės juodos. Taip būti negali, nes šioje eilutėje lygiai viena šaškė juoda.

Vadinasi, iš viso būtų 4+5+5 = 14 būdų.

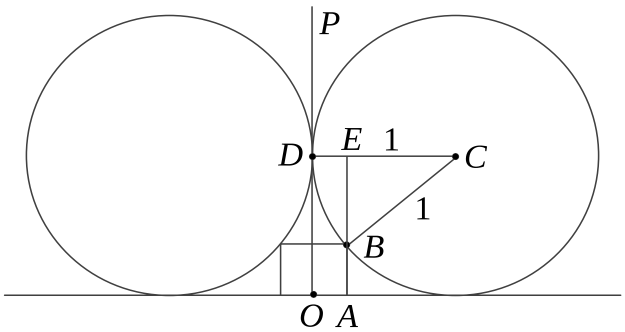
Analogiškai perrinkę atvejus, kai viduriniuose stulpeliuose yra po 1 juodą šaškę, vėl gautume 14 būdų. Jų yra tiek pat, nes iš kiekvienos vienšaškės dėlionės galima gauti dvišaškę ir atvirkščiai: dėlionėje pakeičiame visų šaškių trijose apatinėse eilutėse spalvą ir dvi eilutes (kur yra po 1 ir 3 juodas šaškes) sukeičiame vietomis. Kadangi visos dėlionės taip suskirstomos poromis, kur viena dėlionė vienšaškė, o kita dvišaškė, tai jų ir yra po lygiai.

Taigi iš viso būtų 14 + 14 = 28 būdai.

Atsakymas

Yra 28 tokie būdai.

5.



Raide D pažymėkime mūsų vienodo spindulio 1 apskritimų sąlyčio tašką ir per jį išveskime tuos apskritimus perskiriančią liestinę. Tada ji bus statmena kitai jų bendrai, bet apskritimų nebeperskiriančiai liestinei ir joje gulinčią įbrėžtojo kvadrato kraštinę padalys į dvi lygias dalis (dvi kvadrato viršūnės yra apskritimų ir tiesės, lygiagrečios apskritimų liestinei, sankirta, todėl apskritimų simetrijos ašis neabejotinai yra ir kvadrato simetrijos ašis).

Raide O pažymėkime tų abiejų liestinių sankirtos tašką, o raidėmis A ir B – įbrėžtojo kvadrato šoninės kraštinės galų taškus.

Raide C pažymėkime dešiniojo apskritimo centrą, o raide E – pratęstojo kvadrato šono susikirtimą su spinduliu CD.

Tada CD bus, suprantama, statmenas tai perskiriančiai liestinei PO ir taip pat pratęstajai kvadrato kraštinei.

Jeigu įbrėžtojo kvadrato kraštinės AB ilgį pažymėtume $2x$, tai $OA = x$.

Pastebėkime, kad trikampis BEC yra statusis, jo statinis $EC = CD - ED = 1 - x$, kitas statinis EB lygus $AE - AB = 1 - 2x$. Galiausiai šio stačiojo trikampio įžambinė BC, kaip apskritimo spindulys, yra lygi 1.

Pritaikę Pitagoro teoremą gauname

$$BC^2 = EB^2 + EC^2$$

arba

$$1 = (1-x)^2 + (1-2x)^2.$$

Todėl

$$1 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 4x + 4x^2.$$

Iš čia

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

ir

$$x = \frac{1}{5}.$$

Pastebėkime, kad kitas kvadratinės lygties sprendinys, kuris yra akivaizdžiai lygus 1, mums netinka pagal brėžinį, nes tada statusis trikampis „susitrauktų į atkarpą“.

Todėl

$$x = \frac{1}{5}.$$

Ir ieškomojo kvadrato kraštinės ilgis yra

$$AB = 2x = \frac{2}{5}.$$

Atsakymas

Įbrėžtojo kvadrato kraštinės ilgis yra lygus $\frac{2}{5}$.