

**ALYTAUS APSKRITIES XXI KOMANDINĖ MATEMATIKOS
OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI**

Alytus, 2017 m. gruodžio 1 d.

UŽDAVINIAI

1. Septyniolika darbininkų per 12 dienų uždirba 1020 litų. Kiek gauna trylika darbininkų per 7 dienas?
2. Dėžė yra stačiakampio gretasienio $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ pavidalo, stačiakampis $ABCD$ yra jos dugnas, $AB = 60$ cm, $AD = 40$ cm, $AA_1 = 40$ cm. Iš viršūnės D_1 į viršūnę B ropoja musė. Kuris kelias jai yra trumpiausias ir kokio jis ilgio?
3. Smarkus lietus lijo be perstojo 6 valandas ir užpildė dalį atviro baseino. Nustojus lyti, siurblys visą vandenį išsiurbė per 2 valandas. Per kiek laiko tas pats siurblys visą vandenį būtų išsiurbęs tęsiantis lietai? Spręsdami turėkite mintyje, kad lietus lijo tolygiai, o siurblio darbo tempas pastovus.
4. Įrodykite, kad sveikųjų skaičių m ir n suma $m + n$ yra sveikąjo skaičiaus kvadratas, jeigu
$$(m - n)^2 = \frac{4mn}{m + n - 1}.$$
5. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurį dalijant iš 3 gaunama liekana 2, dalijant iš 5 – liekana 3, o dalijant iš 7 gaunama liekana 2.
6. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (a, b, c) , kuriems esant $a = b^2 + c^2$, $b = c^2 + a^2$, $c = a^2 + b^2$.
7. Išspręskite lygtį su dviem nežinomaisiais
$$x^2 + 4x \cos(xy) + 4 = 0.$$
8. Įrodykite, kad reiškinio
$$\frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} - \frac{a+b}{ab}$$
reikšmė nepriklauso nuo a ir b reikšmių ($a \neq 0, b \neq 0$).
9. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinė AB du kartus trumpesnė nei kraštinė AD . Kraštinės AB tęsinuose nuo taškų A ir B atidėtos atkarpos $AE = BF = AB$. Raskite kampą tarp tiesių EC ir DF .
10. Atkarpa AB yra apskritimo skersmuo, taškas C ją dalija santykiu $AC : CB = 1 : 2$. Iš taško C iškeltas statmuo skersmeniui AB , kuris kerta apskritimą taške D , atkarpa DE yra apskritimo skersmuo. Raskite trikampio DEC plotą, jei trikampio ABD plotas lygus 60.