Rietavo XVI komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2017 11 10

9–10 klasės

---

1 uždavinys. Išspręskite lygtį:

$$\frac{x}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{5\sqrt{3}+3}{2}.$$

Sprendimas. Subendravardiklinę lygties kairiąją pusę gausime lygtį:

$$\frac{x(\sqrt{3}+1)+\sqrt{3}-1}{2} = \frac{5\sqrt{3}+3}{2} \Rightarrow x(\sqrt{3}+1) = 4(\sqrt{3}+1) \Rightarrow x = 4.$$

◀

2 uždavinys. Jonas Rietaviškis eina per geležinkelio tiltą. Perėjęs $\frac{4}{7}$ tilto jis pamato artėjantį traukinį. Čia Jonas suvokia du dalykus:

1. Būdamas ant tilto jis negali prasilenkti su traukiniu;
2. Jis turi lygiai tiek laiko, kiek reikia nubėgti į bet kurį tilto galą ir pasitraukti nuo bėgių prieš atvažiuojant traukiniui.

Kokiu greičiu važiuoja traukinys, jei Jonas Rietaviškis bėga 20 kilometrų per valandą greičiu?

Sprendimas. Jei Jonas Rietaviškis nuspręstų bėgti atgal, jam reikėtų nubėgti $\frac{1}{7}$ didesnę tilto dalį negu bėgant į priekį. Kol Jonas nubėgtų $\frac{1}{7}$ tilto, traukinys pervažiuotų visą tiltą. Taigi traukinys važiuoja 7 kartus greičiau nei bėga Jonas Rietaviškis ir jo greitis yra $20 \cdot 7 = 140$ km/val. ◀

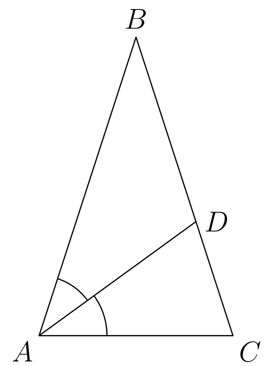
3 uždavinys. Paulius, Monika ir Andrius turi 21 vienodo dydžio uogienės stiklainį. Septyni iš jų yra pilni uogienės, septyni puspilniai, o septyni – visai tušti. Vaikai nori pasidalinti stiklainius taip, kad kiekvienas gautų po tiek pat stiklainių ir po tiek pat uogienės. Kaip jiems tai padaryti neperpilant uogienių?

Sprendimas. Iš viso visuose stiklainiuose yra tiek uogienės, kiek užtektų $7 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot 0 = 10\frac{1}{2}$ stiklainiams pripilti. Vadinasi, kiekvienas iš trijų besidalinančių uogienę ir stiklainius turėtų gauti $10\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ stiklainių uogienės ir $\frac{21}{3} = 7$ stiklainius. Taip galime padaryti, jei Paulius ir Monika pasiimtų po 3 pilnus stiklainius, 3 tuščius ir po vieną puspilnį, o Andriui tuo tarpu liktų 1 pilnas, 1 tuščias ir 5 puspilniai stiklainiai. ◀

4 uždavinys. Ar galima ant apskritimo esančius penkis taškus sujungti atkarpomis taip, kad kiekvienas iš šių penkių taškų būtų sujungtas lygiai su trimis kitais taškais?

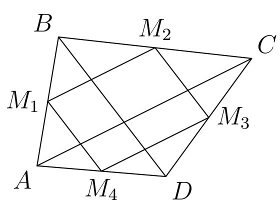
Sprendimas. Tarkime, yra įmanoma taip sujungti taškus m atkarpomis. Šios atkarpos turėtų $2m$ galų. Kita vertus, jei iš kiekvieno iš 5 taškų išeina po 3 atkarpas, tai iš viso yra $5 \cdot 3 = 15$ atkarpų galų. Tačiau 15 yra nelyginis skaičius, vadinasi, taip sujungti taškus yra neįmanoma. ◀

5 uždavinys. Duotas trikampis, kurio kampai yra 36°, 72° ir 72°. Ar gali visų jo kraštinių ilgiai būti racionalieji skaičiai?



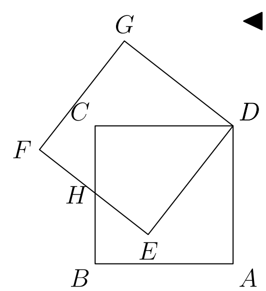
Sprendimas. Brėžinyje trikampio $\triangle ABC$ kampai $\angle A = \angle C = 72°$, o kampas $\angle B = 36°$. Kadangi $\triangle ABC$ – lygiašonis, tai pažymėkime $AB = BC = x$, o pagrindą $AC = y$. Pusiaukampinė AD dalija kampą $\angle BAC$ į du $\frac{72}{2} = 36°$ didumo kampus, taigi $\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle ACD = 180° - 36° - 72° = 72°$ ir trikampiai $\triangle DAC$ ir $\triangle ABC$ yra panašieji, o lygiašonio trikampio šoninės kraštinės lygios: $AD = AC = y$. Taip pat ir $\angle DAB = \angle DBA = 36°$, todėl $\triangle BDA$ yra lygiašonis ir $BD = DA = y$, o $CD = BC - BD = x - y$. Dabar iš trikampių $\triangle ABC$ ir $\triangle CAD$ panašumo gauname, kad $\frac{y}{x} = \frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - 1$. Įvedę keitinį $t = \frac{y}{x}$ ir pertvarkę lygtį gauname $\frac{t^2+t-1}{t} = 0$ ir išsprendę kvadratinę lygtį randame, jog $t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Kadangi $t > 0$, tai $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Vadinasi kraštinių santykis $\frac{y}{x}$ yra iracionalusis skaičius, taigi bent vienos trikampio $\triangle ABC$ kraštinės ilgis yra iracionalusis skaičius. ◀

6 uždavinys. Įrodykite, kad sujungę bet kokio iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškus gausime lygiagretainį.



Sprendimas. Tegu $ABCD$ - keturkampis, o M_1, M_2, M_3, M_4 – jo kraštinių vidurio taškai. Pastebėkime, kad M_1M_2 yra trikampio $\triangle ABC$ vidurinė linija, todėl $M_1M_2 \parallel AC$ ir $M_1M_2 = \frac{AC}{2}$. Analogiškai M_3M_4 yra trikampio $\triangle ACD$ vidurinė linija ir $M_3M_4 \parallel AC \parallel M_1M_2$ ir $M_3M_4 = \frac{AC}{2} = M_1M_2$. Analogiškai samprotaudami gauname, kad $M_2M_3 \parallel M_4M_1$ ir $M_2M_3 = M_4M_1$. Vadinasi, $M_1M_2M_3M_4$ – lygiagretainis. ◀

7 uždavinys. Paveikslėlyje pavaizduoti du kvadratai $ABCD$ ir $DEFG$, kurių plotai yra 16. Jei H yra BC ir EF vidurio taškas, koks yra figūros $ABHFGD$ plotas?



Sprendimas. Jei kvadratų plotai yra 16, tai jų kraštinių ilgiai yra $\sqrt{16} = 4$. Pastebėsime, kad $S_{ABCD} + S_{DEFG} = 16 + 16 = 32 = S_{ABHFGD} + S_{CDEH}$. Belieka suskaičiuoti, koks yra keturkampio $CDEH$ plotas. Šis keturkampis sudarytas iš dviejų lygių stačiųjų trikampių: $\triangle CDH$ ir $\triangle DEH$, todėl $S_{CDEH} = 2S_{CDH} = 2 \cdot \frac{4\cdot 2}{2} = 8$, o tuomet $S_{ABHFGD} = 32 - 8 = 24$. ◀

8 uždavinys. Barbora sugalvoja kokį nors natūralųjį skaičių ir užrašo jį ant lapo, tada mintyse padaugina jį iš dviejų ir prirašo šį dvigubą skaičių šalia pirmojo iš dešinės, taip gaudama vieną „ilgą“ skaičių. Ar visada šis skaičius dalijasi iš šešių?

Sprendimas. Pažymėkime Barboros sugalvotą skaičių a, o skaičiaus $2a$ skaitmenų skaičių pažymėkime $k \geqslant 1$. Tuomet „ilgasis“ skaičius yra lygus $a \cdot 10^k + 2a = a \cdot (10^k + 2)$. Kadangi skaičiaus $(10^k + 2)$ yra lyginis ir jo skaitmenų suma visada bus lygi 3, tai ir „ilgasis“ skaičius visada dalysis iš šešių be liekanos. ◀

9 uždavinys. Koks mažiausias natūralusis skaičius tampa 57 kartus mažesnis nubraukus pirmąjį jo skaitmenį?

Sprendimas. Pažymėkime ieškomo skaičiaus pirmąjį skaitmenį a, o skaičių, gautą nubraukus pirmąjį skaitmenį – b, o b skaitmenų skaičių pažymėkime k. Tuomet ieškomą skaičių galime užrašyti šitaip: $a \cdot 10^k + b$. Sudarome lygtį: $a \cdot 10^k + b = 57 \cdot b$, iš čia $a \cdot 10^k = 56 \cdot b$. Kairioji lygybės pusė dalijasi iš 7 (nes $56 = 7 \cdot 8$), o kadangi 10^k tikrai nesidalija iš 7, o a - vienaženklis, tai $a = 7$. Kita vertus, kairioji pusė taip pat dalijasi iš 8, o mažiausias 10-ies laipsnis, kuris dalijasi iš 8, yra 1000 (t. y. $k = 3$). Dabar jau galime rasti b: $a \cdot 10^k = 7000 = 56 \cdot b \implies b = 125$, o mūsų ieškomas skaičius lygus $7000 + 125 = 7125$. ◀

10 uždavinys. Tarkime, kad n yra dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma. Įrodykite, kad $2n$ taip pat yra dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma.

Sprendimas. Tarkime a ir b yra tokie natūralieji skaičiai, kad $a^2+b^2 = n$. Tuomet $(a-b)^2+(a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2n$. ◀

Rietavo XVI komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas

2017 11 10

11–12 klasės

---

1 uždavinys. Duota funkcija $y = x^2 - 6ax + a^4$; čia $|a| \leqslant 1$. Su kiekviena iš a reikšmių funkcijos mažiausią reikšmę pažymėkime $y_{\min}$. Su kuria parametro a reikšme $y_{\min}$ yra didžiausia?

Sprendimas. Kadangi $y = x^2 - 6ax + a^4 = (x - 3a)^2 - 9a^2 + a^4$, tai mažiausia y reikšmė įgyjama, kai $x = 3a$, ir lygi $y_{\min} = a^4 - 9a^2 = a^2(a^2 - 9)$.

Bet $|a| \leqslant 1$, todėl $a^2 - 9 < 0, y_{\min} \leqslant 0$, ir $y_{\min}$ didžiausia reikšmė yra 0, kuri pasiekiama, kai $a = 0$.

$\blacktriangleleft$

2 uždavinys. Žinome, kad funkcijos $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$ reikšmė, kai $x = 7$ yra $f(7) = 7$. Kam lygi funkcijos $f(x)$ reikšmė, kai $x = -7$?

Sprendimas. $f(-7) = (-7)^7a + (-7)^3b - 7c - 5 = -(7^7a + 7^3b + 7c) - 5 = -(7^7a + 7^3b + 7c - 5) - 10 =$ $= -f(7) - 10 = -17$.

$\blacktriangleleft$

3 uždavinys. Įrodykite, kad jei $c + d = 1$, $c \neq 1$, $d \neq 1$ ir $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{1}{ac+bd}$, tai $a = b$.

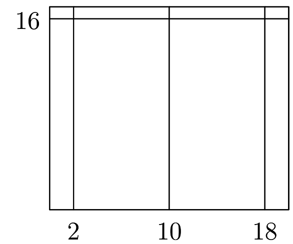
Sprendimas. [LJMO 1986] Padauginę abi lygybės $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{1}{ac+bd}$ puses iš $ac + bd$, turime $c^2 + \frac{bcd}{a} +$ $+ \frac{acd}{b} + d^2 = 1$, o kadangi $c + d = 1$, tai $c^2 + d^2 + \frac{bcd}{a} + \frac{acd}{b} = (c + d)^2 \Leftrightarrow cd\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 2cd$. Kadangi $cd \neq 0$, tai $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$. $\blacktriangleleft$

4 uždavinys. Apskritimas padalintas į 4 sektorius. Į kiekvieną sektorių laikrodžio rodyklės kryptimi yra įrašyta po vieną skaičių: 1, 0, 1, 0. Kiekvienu ėjimu prie pasirinktų dviejų kaimyninių skaičių pridedame po vienetą. Ar įmanoma, kad po kažkurio ėjimo visuose sektoriuose esantys skaičiai būtų lygūs?

Sprendimas. Pažymėkime sektoriuose esančius skaičius pagal laikrodžio rodyklę raidėmis a, b, c ir d. Kiekvienu ėjimu vienetu padidėja gretimi skaičiai, todėl reiškinio $a - b + c - d$ reikšmė niekada nesikeičia. Tai vadinama *invariantu.* Pradinė reiškinio reikšmė yra $1 - 0 + 1 - 0 = 2$. Jei visuose sektoriuose skaičiai būtų lygūs, reiškinio reikšmė būtų lygi 0. Gavome prieštarą. $\blacktriangleleft$

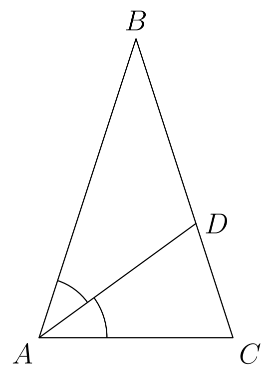
5 uždavinys. Stačiakampyje 20×17 Izabelė ir Mykolas paeiliui spalvina bet kokio dydžio iš langelių sudarytus kvadratus. Jokie du kvadratai negali persidengti. Žaidimą pralaimi tas, kuris nebegali nuspalvinti jokio kvadrato. Izabelė pradeda žaidimą. Kaip jai reikia žaisti, kad visada laimėtų žaidimą?

Sprendimas. Izabelė gali pasinaudoti klasikine tokių žaidimų taktika kodiniu žodžiu „simetrija“, kurios esmė – atlikti tokį pirmąjį ėjimą, kad paskui kokį kvadratą benuspalvintų Mykolas, Izabelė visada galėtų nuspalvinti kuria nors prasme simetrišką kvadratą. Tam Izabelei reikia pirmuoju ėjimu nuspalvinti „centrinį“ kvadratą: tai 16×16 kvadratas, kurio simetrijos ašis sutampa su ta stačiakampio simetrijos ašimi, kuri stačiakampį padalina į du 10×17 dydžio stačiakampius. Tada Mykolas būtinai turės spalvinti kokį nors kvadratą, kuris yra tik vienoje šitos simetrijos ašies pusėje (jis nebegalės spalvinti jokio kvadrato, per kurį eitų simetrijos ašis, nes prie simetrijos ašies nenuspalvinta liko tik 1 langelio pločio juostelė), o Izabelė visada galės nuspalvinti simetrišką šios ašies atžvilgiu. Kadangi anksčiau ar vėliau visi kvadratėliai bus nuspalvinti, tai Mykolas nebegalės atlikti ėjimo ir Izabelė laimės žaidimą. ◀



6 uždavinys. Duotas trikampis, kurio kampai yra $36°$, $72°$ ir $72°$. Ar gali visų jo kraštinių ilgiai būti racionalieji skaičiai?

Sprendimas. Brėžinyje trikampio $\triangle ABC$ kampai $\angle A = \angle C = 72°$, o kampas $\angle B = 36°$. Kadangi $\triangle ABC$ – lygiašonis, tai pažymėkime $AB = BC = x$, o pagrindą $AC = y$. Pusiaukampinė AD dalija kampą $\angle BAC$ į du $\frac{72}{2} = 36°$ didumo kampus, taigi $\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle ACD = 180° - 36° - 72° = 72°$ ir trikampiai $\triangle DAC$ ir $\triangle ABC$ yra panašieji, o lygiašonio trikampio šoninės kraštinės lygios: $AD = AC = y$. Taip pat ir $\angle DAB = \angle DBA = 36°$, todėl $\triangle BDA$ yra lygiašonis ir $BD = DA = y$, o $CD = BC - BD = x - y$. Dabar iš trikampių $\triangle ABC$ ir $\triangle CAD$ panašumo gauname, kad $\frac{y}{x} = \frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - 1$. Įvedę keitinį $t = \frac{y}{x}$ ir pertvarkę lygtį gauname $\frac{t^2+t-1}{t} = 0$ ir išsprendę kvadratinę lygtį randame, jog $t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Kadangi $t > 0$, tai $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Vadinasi kraštinių santykis $\frac{y}{x}$ yra iracionalusis skaičius, taigi bent vienos trikampio $\triangle ABC$ kraštinės ilgis yra iracionalusis skaičius. ◀



7 uždavinys. Tiesėje AB padėtas toks taškas C, kad $AC = 3CB$. Apskritimų, kurių skersmenys yra AC ir CB, bendroji liestinė kerta tiesę AB taške D. Įrodykite, kad $BD = \frac{CB}{2}$.

Sprendimas. Apskritimų, kurių skersmenys AC ir BC, centrus pažymėkime atitinkamai O_1 ir O_2, o taškus, kur šiuos apskritimus liečia jų bendra liestinė, – atitinkamai E ir F. Pažymėkime $CB = x$, o $DB = y$. Tada $BO_2 = FO_2 = CO_2 = \frac{x}{2}$, o $CO_1 = EO_1 = \frac{3x}{2}$, Trikampiai $\triangle DO_1E$ ir $\triangle DO_2F$ yra statūs ir panašieji, todėl

$$\frac{EO_1}{FO_1} = 3 = \frac{DO_1}{DO_2} = \frac{\frac{5x}{2} + y}{\frac{x}{2} + y} \implies \frac{3x}{2} + 3y = \frac{5x}{2} + y, \quad y = bD = \frac{x}{2} = \frac{CB}{2}.$$

◀

8 uždavinys. Jonas Rietaviškis ir Petras Plungiškis žaidžia tokį žaidimą su laikrodžiu (laikrodžio ciferblatas su skaičiais nuo 1 iki 12): Jonas pasirenka kokį nors skaičių nuo 1 iki 12, bet nesako, kokį. Tada Petras pradeda rodyti į skaičius laikrodyje, o sulig kiekvienu Petro parodytu skaičiu Jonas prie savo sugalvotojo skaičiaus mintyse prideda po 1. Kai Jonas gauna skaičių 20, jis pasako „stop“. Kaip Petrui reikia rodyti į skaičius laikrodyje, kad kai Jonas pasako „stop“, Petro rodomas skaičius būtų tas pats, kokį Jonas sugalvojo iš pradžių?

Sprendimas. Jeigu Jono pasirinktas skaičius būtų 12, tai jis pasiektų 20 ir pasakytų „stop“ po 8-ojo Petro parodyto skaičiaus. Vadinasi, 8-asis Petro parodytas skaičius turėtų būti 12. Jeigu

Jonas pasirinktų 11, tai sakytų „stop“ po 9-ojo parodyto skaičiaus, taigi 9-uoju kartu Petras turėtų parodyti į 11. Analogiškai, 10-asis Petro parodytas skaičius turėtų būti 10, po to – 9 ir t.t. iki 19-uoju kartu Petras parodytų į 1-etą. Kitaip sakant, pirmus septynis skaičius Petras rodo betkaip, aštuntą kartą parodo į 12 ir tada juda prieš laikrodžio rodyklę tol, kol Jonas pasako „stop“. ◀

9 uždavinys. Lentoje surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 10^6. Kiekvienu ėjimu kiekvieną skaičių pakeičiame jo skaitmenų suma. Taip darome tol, kol visi lentoje surašyti skaičiai tampa vienaženkliai. Ko lentoje bus daugiau – vienetukų ar dvejetukų?

Sprendimas. Įrodysime, kad bet kuris natūralusis skaičius duoda tokią pačią liekaną dalijant iš 9 kaip ir to skaičiaus skaitmenų suma. Iš tiesų, imkime skaičių

$$\overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n \cdot 10^0.$$

Pastebėkime, kad paėmus bet kokį 10-ies laipsnį 10^k ir atėmus 1 gautume skaičių, sudarytą iš k devynetų, taigi $10^k - 1$ dalijasi iš 9, o 10^k duoda liekaną 1, t.y. $10^k = 9b_k + 1$, kur b_k žymi tam tikrą natūralųjį skaičių (raskite, kokį?). Taigi

$$\begin{aligned}\overline{a_0 a_1 \dots a_n} &= a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0 \cdot (9b_0 + 1) + a_1 \cdot (9b_1 + 1) + \cdots + a_n \\ &= 9 \cdot (a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1}) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n),\end{aligned}$$

Taip bet kurį natūralųjį skaičių išskaidėme į du dėmenis: pirmąjį, dalų iš 9, ir antrąjį, kuris lygus to skaičiaus skaitmenų sumai. Vadinasi, skaičiaus ir jo skaitmenų sumos liekanos dalinant iš 9 sutampa.

Taigi skaičių keičiant jo skaitmenų suma iki vienaženklio skaičiaus, galiausiai gausime to skaičiaus liekaną dalinant iš 9 (jei skaičius dalijasi iš 9, gausime ne 0, o 9), o tai reiškia, kad galiausiai lentoje likę skaičiai (eilės tvarka) atrodys taip:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$$

Koks bus paskutinis skaičius šioje eilėje? Jau parodėme, kad 10^6 liekana dalijant iš 9 lygi 1, taigi toks ir bus paskutinis skaičius. Vadinasi, 1-etukų bus daugiau nei 2-etukų. ◀

10 uždavinys. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais egzistuoja pirminiai skaičiai p, q ir r, tenkinantys lygybę $p^n + q^2 = r^2$.

Sprendimas. Iš pradžių pastebėsime kelis dalykus:

- Jei $r = 2$, tai lygybė nėra teisinga su jokiais pirminiais p ir q (įsitikinkite!). Todėl r - būtinai nelyginis pirminis skaičius.

- $p^n = r^2 - q^2 = (r - q)(r + q)$. Kadangi p - pirminis, tai abu dauginamieji yra lygūs kokiam nors p laipsniui:
$$\begin{cases} r - q = p^k, \\ r + q = p^l, \end{cases}$$
kur k ir l – sveiki neneigiami skaičiai ir $l > k$.

- Sudėję abi lygybes gauname $2r = p^k + p^l = p^k(p^{l-k} + 1)$. Kadangi p^k dalija $2r$, o r – nelyginis, tai gauname 3 atvejus: $p^k = 1$, $p^k = 2$ ir $p^k = r$.

- (Dar galėtume pastebėti – kadangi r^2 yra nelyginis, tai būtinai vienas iš sąlygos sumos dėmenų p^n arba q^2 yra lyginiai, taigi arba p, arba q lygus 2. Šis pastebėjimas, nors mūsų sprendimui ir nereikalingas, taip pat gali pasitarnauti ieškant teisingo sprendimo.)

O dabar nagrinėsime tris gautuosius atvejus:

1. Jei $p^k = 1$, tai $r - q = 1$. Vieninteliai pirminiai tenkinantys šią lygybę yra $r = 3$ ir $q = 2$. Tuomet $r + q = 5 = p^l$, vadinasi, $l = 1, p = 5$ ir galiausiai $n = 1$.

2. Jei $p^k = 2$, tai $p = 2$, $k = 1$ ir lygybę $2r = p^k + p^l$ perrašome taip: $2r = 2 + 2^l \implies r = 2^{l-1} + 1$, o $q = r - 2 = 2^{l-1} - 1$. Lygiai vienas iš trijų iš eilės einančių skaičių $q = 2^{l-1} - 1$, 2^{l-1}, $r = 2^{l-1} + 1$ dalijasi iš 3 ir šis skaičius tikrai nebus vidurinysis 2^{l-1}, taigi arba q, arba r dalijasi iš 3. Kadangi abu šie skaičiai pirminiai, tai $q = 3$ arba $r = 3$. Jei $r = 3$, tai $q = r - 2 = 1$, gauname prieštarą, lygybė neteisinga, o jei $q = 3$, $r = 5$, o $p^n = 2^n = 5^2 - 3^2 = 16$ ir $n = 4$.

3. Jei $p^k = r$, tai gauname $r - q = p^k = r$ ir $q = 0$, o taip būti negali, gauname prieštarą.

Taigi, vieninteliai n, su kuriais $p^n + q^2 = r^2$ turi sprendinį, yra $n = 1$ ir $n = 4$. ◀