PASVALIO KRAŠTO 19-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2017 m. lapkričio 24 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Du šimtai natūraliųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_{200}$ surašyti į vieną eilutę taip, kad bet kurių trijų kaimynų suma lygi 200. Pirmas skaičius yra 98, o paskutinis – 19. Kokie kiti skaičiai?

Sprendimas. Pagal sąlygą,

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4 + a_5 = ... = a_{197} + a_{198} + a_{199} = a_{198} + a_{199} + a_{200} = 200.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$a_4 = a_1,\ a_5 = a_2,\ a_6 = a_3,\ a_7 = a_1,\ a_8 = a_2,\ a_9 = a_3,\ a_{10} = a_1,\ a_{11} = a_2,\ a_{12} = a_3, ...,$$
$$a_{196} = a_1,\ a_{197} = a_2,\ a_{198} = a_3,\ a_{199} = a_1,\ a_{200} = a_2.$$

Kadangi $a_1 = 98$, $a_{200} = a_2 = 19$ ir $a_1 + a_2 + a_3 = 200$, tai $a_3 = 83$.

Gauname tokią skaičių seką:

98, 19, 83, 98, 19, 83, ..., 98, 19, 83, 98, 19.

Ats.: 98, 19, 83, 98, 19, 83, ..., 98, 19, 83, 98, 19.

2. Raskite skaičiaus $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2017}$ paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. Sumuodami skaičiaus 3 laipsnius gauname:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40;$$
$$3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = 3^4(1 + 3 + 9 + 27) = 3^4 \cdot 40;$$
$$3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11} = 3^8(1 + 3 + 9 + 27) = 3^8 \cdot 40 \text{ ir t. t.}$$

Kadangi sekoje 0, 1, 2, ..., 2015 yra $2016 = 4 \cdot 504$ skaičių, tai sumos $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2015}$ paskutinis skaitmuo yra 0.

Belieka rasti sumos $3^{2016} + 3^{2017} = 3^{2016} \cdot (1 + 3) = 9^{1008} \cdot 4 = 81^{504} \cdot 4$ paskutinį skaitmenį. Aišku, kad jis yra 4.

Ats.: 4.

3. Įrodykite, kad jei ir skaičius a, ir skaičius b baigiasi skaitmenų pora 76, tai ir jų sandauga $a \cdot b$ baigiasi skaitmenų pora 76.

Įrodymas. Kadangi

$$a = \overline{x76} = 100x + 76, \qquad b = \overline{y76} = 100y + 76,$$

tai

$$a \cdot b = (100x + 76)(100y + 76) = 10000xy + (76x + 76y)100 + 5776 =$$
$$= (100xy + 76x + 76y) \cdot 100 + 57 \cdot 100 + 76 = (100xy + 76x + 76y + 57) \cdot 100 + 76.$$

Pažymėkime $z = 100xy + 76x + 76y + 57$ ir gausime, kad

$$a \cdot b = z \cdot 100 + 76 = \overline{z76}.$$

4. Apskaičiuokite sandaugą

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right).$$

Sprendimas. Remdamiesi formule

$$1-\frac{1}{k^2}=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2},\quad k=2,3,\ldots,$$

gausime:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2016^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2015\cdot 2017}{2016^2}\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2018}{2017}=\frac{1009}{2017}.$$

Ats.: $\frac{1009}{2017}$.

5. Vabalas šliaužia kubo briaunomis, kurių ilgis lygus 1. Pasiekęs viršūnę, jis pasirenka vieną iš trijų briaunų ir šliaužia ja. Apskaičiuokite:

1) kiek yra kelių iš vienos viršūnės, kai nueinama 4 ilgio vienetai;
2) kiek tarp tų kelių yra tokių, kurie veda į pradinę viršūnę.

Sprendimas. 1) Kiekvienam žingsniui atlikti yra 3 galimos kryptys. Todėl bendras kelių skaičius yra $3^4=81$.

2) Yra 3 keliai ta pačia briauna (du kartus pirmyn-atgal).

Yra 6 keliai einant tolyn dviem briaunomis ir grįžtant atgal.

Yra 6 keliai einant visomis keturiomis kurios nors iš trijų sienų briaunomis (kartą viena kryptimi ir kartą priešinga kryptimi).

Yra 6 keliai einant viena briauna pirmyn-atgal ir kita briauna pirmyn-atgal.

Taigi iš viso yra $3+6+6+6=21$ kelias, vedantis į pradinę viršūnę.

Ats.: 1) 81; 2) 21.

6. Kvadratinių trinarių $f(x)$ ir $g(x)$ vyriausiojo nario koeficientas lygus 1. Taip pat žinoma, kad

$$f(12)+f(20)=g(12)+g(20).$$

Įrodykite, kad yra toks natūralusis skaičius *n*, kad $f(n)=g(n)$.

Sprendimas. Tegu

$$f(x)=x^2+b_1x+c_1 \quad\text{ir}\quad g(x)=x^2+b_2x+c_2.$$

Tada

$$f(12)+f(20)=144+400+12b_1+20b_1+2c_1=544+32b_1+2c_1=2(272+16b_1+c_1)$$

ir

$$g(12)+g(20)=544+32b_2+2c_2=2(272+16b_2+c_2).$$

Kadangi $f(12)+f(20)=g(12)+g(20)$, tai

$$16b_1+c_1=16b_2+c_2.$$

Iš čia gauname, kad

$$16^2+16b_1+c_1=16^2+16b_2+c_2.$$

Taigi $f(16)=g(16)$.

Ats.: $n=16$.

7. Tegu k, l, m ir n yra neneigiami sveikieji skaičiai, $k+l=9$ ir $m+n=1$. Raskite didžiausią reiškinio

$$m(k-9n)^2+n(l-9m)^2$$

reikšmę.

Sprendimas. Pagal sąlygą, $k=9-l$, $m=1-n$. Todėl

$$m(k-9n)^2+n(l-9m)^2=(1-n)(9-l-9n)^2+n(l-9+9n)^2=$$

$$=(9-l-9n)^2-n(9-l-9n)^2+n(-(9-l-9n))^2=(9-l-9n)^2=(l+9n-9)^2\le 9^2=81.$$

Didžiausią reikšmę, lygią 81, reiškinys įgyja, kai $l=0$, $k=9$, $n=0$ ir $m=1$ arba $l=9$, $k=0$, $n=1$ ir $m=0$.

Ats.: 81.

8. Apskaičiuokite $x^2+y^2+z^2$, jei $x+y+z=1$ ir $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Sprendimas.

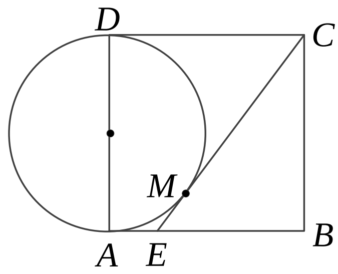
$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y+z)^2=1, \\ \frac{yz+zx+xy}{xyz}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1, \\ yz+zx+xy=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1.$$

Ats.: 1.

9. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 1, jo kraštinė AD yra apskritimo skersmuo. Iš viršūnės C nubrėžta to apskritimo liestinė kerta kraštinę AB taške E. Raskite trikampio CBE plotą.

Sprendimas. Atkarpos CE ir apskritimo lietimosi tašką pažymėkime M. Pagal liestinių savybę

$$CM=CD=1 \quad \text{ir} \quad EA=EM.$$



Pažymėję $AE=x$, gausime, kad

$$EB=1-x,\ CE=1+x.$$

Iš stačiojo trikampio CBE gausime:

$$(1-x)^2+1^2=(1+x)^2,$$

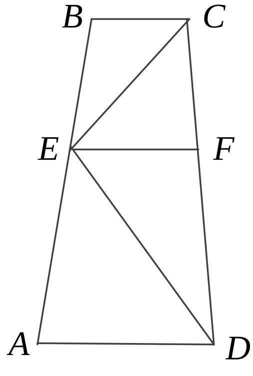
$$1-2x+x^2+1=1+2x+x^2,$$

$$x=\frac{1}{4}.$$

Vadinasi, $BE=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Todėl trikampio CBE plotas yra $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{8}$.

Ats.: $\frac{3}{8}$.

10. Trapecijos $ABCD$ pagrindai yra atkarpos AD ir BC, šoninėje kraštinėje AB pažymėtas taškas E toks, kad $\angle ADE=54^\circ$, $\angle ECB=48^\circ$. Raskite kampą DEC.



Sprendimas. Sakykime, kad šoninės kraštinės CD taškas F yra toks, kad $EF \parallel BC$. Tuomet $\angle DEF=\angle ADE$, $\angle CEF=\angle ECB$, taigi $\angle DEC=\angle DEF+\angle CEF=\angle ADE+\angle ECB=102^\circ$.

Ats.: 102°.

PASVALIO KRAŠTO
19-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2017 m. lapkričio 24 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Į vieną iš indų A ir B įpilta gryno vandens, o į kitą – gryno spirito. Pradžioje iš indo A į indą B perpilama tiek skysčio, kad inde B skysčio būtų du kartus daugiau negu buvo pradžioje. Tada (gerai sumaišius) iš indo B į indą A perpilama tiek skysčio, kad inde A jo būtų du kartus daugiau negu liko po pirmo perpylimo. Po šių dviejų veiksmų skysčio abiejuose induose pasidarė po lygiai. Be to, inde A spirito dabar yra 3 litrais daugiau negu vandens. Kiek litrų spirito dabar yra inde A?

Sprendimas. Tarkime, kad iš pradžių inde A buvo x litrų, o inde B – y litrų skysčio (viename – vandens, o kitame – spirito).

Po pirmo perpylimo inde A liko $x-y$, o inde B pasidarė $2y$ litrų skysčio.

Po antro perpylimo inde B liko $2y-(x-y)=3y-x$ litrų, o inde A pasidarė $2(x-y)$ litrų skysčio.

Iš lygties $3y-x=2(x-y)$ gauname, kad $y=0{,}6x$.

Inde A (pradžioje) buvusį skystį pavadinkime pirmuoju skysčiu, o inde B buvusį skystį – antruoju skysčiu.

Po pirmo perpylimo inde A liko $x-y$ litrų pirmojo skysčio, o po antro perpylimo jo sugrįžo $\frac{x-y}{2}$ litrų ir atsirado $\frac{x-y}{2}$ litrų antrojo skysčio (nes į B buvo įpilta y litrų pirmojo skysčio). Vadinasi, po antro perpylimo inde A buvo $x-y+\frac{x-y}{2}=\frac{3(x-y)}{2}$ litrų pirmojo skysčio ir $\frac{x-y}{2}$ litrų antrojo skysčio.

Pažymėję a dabar esantį vandens kiekį inde A, gautume, kad $a=\frac{x-y}{2}$ ir $a+3=\frac{3(x-y)}{2}$. Iš čia išplaukia, kad $a=1{,}5$.

Vadinasi, spirito inde A dabar yra $1{,}5+3=4{,}5$ litro.

Ats.: 4,5.

2. Kortelės sunumeruotos 1, 2, 3, ..., n. Jos suskirstytos į dvi krūveles. Raskite mažiausią kortelių skaičių n, kad ir koks būtų suskirstymas į krūveles bent vienoje krūvelėje būtų dvi kortelės, kurių numerių suma būtų kurio nors sveikojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Aišku, kad negali būti $n=3$, $n=4$. Taip pat negali būti $n=5$, $n=6$, ..., $n=14$. Šių atvejų analizė yra panaši. Išsamiau panagrinėkime atvejį $n=14$. Jei į vieną krūvelę sudėtume korteles, kurių numeriai 1, 2, 4, 6, 9, 11 ir 13, o į kitą krūvelę korteles, kurių numeriai yra 3, 5, 7, 8, 10, 12 ir 14, tikrai nerasime nė vienos kortelių poros (toje pačioje krūvelėje), kurių numerių suma būtų sveikojo skaičiaus kvadratas.

Dabar pereikime prie $n = 15$. Kadangi $1 + 15 = 4^2$ ir $1 + 3 = 2^2$, tai 3 ir 15 turi būti toje pačioje krūvelėje, o 1 – kitoje. Kortelės, kurių numeriai 6 ir 10 taip pat turi būti skirtingose krūvelėse. Bet ir rinkinyje 3, 15, 6, ir rinkinyje 3, 15, 10 yra kortelių pora, kurių numerių suma yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Vadinasi, atveju $n = 15$ neįmanoma išvengti, kad bent vienoje krūvelėje nebūtų dviejų kortelių, kurių numerių suma yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Ats.: 15.

3. Jonas atliko 7 testus ir už kiekvieną gavo po skirtingą balų skaičių iš 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99 ir 100. Jis nustatė, kad po kiekvieno testo gautų įvertinimų vidurkis yra sveikasis skaičius. Kiek balų Jonas gavo už šeštą testą, jeigu septintas testas buvo įvertintas 95 balais?

Sprendimas. Jono gautų įvertinimų už pirmuosius 6 testus vidurkį pažymėkime *n*, o šešto testo įvertinimą *x*.

Aišku, kad $91 < n < 100$, o $\dfrac{6n+95}{7}$ yra sveikasis skaičius. Kadangi $6n + 95 = (6n + 4) + 91 =$ $= 2(3n + 2) + 13 \cdot 7$, tai $\dfrac{6n+95}{7} = 2 \cdot \dfrac{3n+2}{7} + 13.$

Skaičius $3n + 2$, $91 < n < 100$, dalijasi iš 7 tik kai $n = 95$.

Pirmų penkių testų vidurkis $\dfrac{6n - x}{5} = \dfrac{6 \cdot 95 - x}{5} = 6 \cdot 19 - \dfrac{x}{5}$ taip pat yra sveikasis skaičius. Vadinasi, $x = 100$.

Ats.: 100.

4. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių *m*, *n* ir *k* trejetų $(m;\, n;\, k)$, kuriems esant

$$\sqrt{m^n + k!} = 28$$

(čia simboliu *k*! žymima sandauga $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ – skaičiaus *k* faktorialas).

Sprendimas. Taikykime perrankos metodą. Pradėkime nuo galimų *k* reikšmių. Kadangi (pagal sąlygą) $k! = 28^2 - m^n = 784 - m^n < 784$ ir $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, tai $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Sudarykime laipsnio m^n reikšmių lentelę

k	
1	$783 = 3^3 \cdot 29$
2	$782 = 2 \cdot 17 \cdot 23$
3	$778 = 2 \cdot 389$
4	$760 = 2^3 \cdot 5 \cdot 19$
5	$664 = 2^3 \cdot 83$
6	$64 = 2^6 = 4^3 = 8^2$

Iš pateiktų skaidinių pirminiais dauginamaisiais matyti, kad yra tik tokie uždavinio sąlygą tenkinantys trejetai $(m;\, n;\, k)$: (783; 1; 1), (782; 1; 2), (778; 1; 3), (760; 1; 4), (664; 1; 5), (64; 1; 6), (2; 6; 6), (4; 3; 6) ir (8; 2; 6). Iš viso tokių trejetų yra 9.

Ats.: 9.

5. Skaičiai $a=\sqrt{10^{4034}-10^{2017}}$ ir $b=\sqrt{10^{4034}-10^{2017}+1}$ suapvalinti vienetų tikslumu. Įrodykite, kad gauti natūralieji skaičiai skiriasi vienetu.

Įrodymas. Kadangi $(10^{2017}-1)^2<a^2<\left(10^{2017}-\frac{1}{2}\right)^2$, tai $a\approx 10^{2017}-1.$

Analogiškai iš dvigubos nelygybės $\left(10^{2017}-\frac{1}{2}\right)^2<b^2<10^{4034}$ gauname, kad $b\approx 10^{2017}$.

Matome, kad apytikslė b reikšmė vienetu didesnė už apytikslę a reikšmę.

6. Nustatykite, ar dalijant skaičių 444...443 iš 13 galima gauti liekaną, lygią 0. O liekaną 12?

Sprendimas. a) Kadangi

$$\underbrace{444...443}_{n}=10\cdot\underbrace{444...443}_{n-1}+13,$$

tai skaičius 444...443 turėtų dalytis iš 13, turėdamas vis mažiau ketvertų. Bet 43 nesidalija iš 13. Todėl dalijant skaičių 444...443 iš 13 nuliui lygios liekanos neįmanoma gauti.

b) Kad gautume liekaną 12, skaičius $444...443-12=444...431$ turėtų dalytis iš 13. Dalydami gausime, kad $444\,431=13\cdot 34187$.

Ats.: Nulio gauti negalima, o 12 – galima.

7. Raskite visas realiųjų skaičių a ir b poras (a; b), kurioms esant $a^2+b^2=20$ ir $ab+6b=32.$

Sprendimas. Pirmą lygtį padauginkime iš 4 ir atimkime antrą lygtį, padaugintą iš 4. Gausime:

$$4(a^2+b^2)-4(ab+6b)=-48,$$
$$(4a^2+b^2-4ab)+(3b^2-24b+48)=0,$$
$$(2a-b)^2+3(b^2-8b+16)=0,$$
$$(2a-b)^2+3(b-4)^2=0.$$

Ši lygybė galioja tik kai $2a-b=0$ ir $b=4.$ Iš čia gauname, kad $a=2,$ $b=4.$ Pora (2; 4) tenkina ir pirmą, ir antrą lygybę.

Ats.: (2; 4).

8. Išspręskite lygtį

$$(x^2-x-1)^2-x^3=5.$$

Sprendimas. Lygtį pertvarkykime taip:

$((x^2-x-1)^2-4)-(x^3+1)=0,$

$(x^2-x-1-2)(x^2-x-1+2)-(x+1)(x^2-x+1)=0,$

$(x^2-x+1)((x^2-x-3)-(x+1))=0,$

$(x^2-x+1)(x^2-2x-4)=0.$

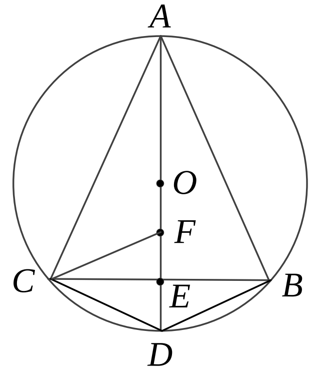
Kadangi $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$ tai būtinai $x^2-2x-4=0.$ Iš čia gauname:

$$(x-1)^2-5=0 \Rightarrow (x-1)^2=5 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{5}.$$

Taigi lygtis turi du sprendinius: $1-\sqrt{5}$ ir $1+\sqrt{5}$.

Ats.: $1\pm\sqrt{5}$.

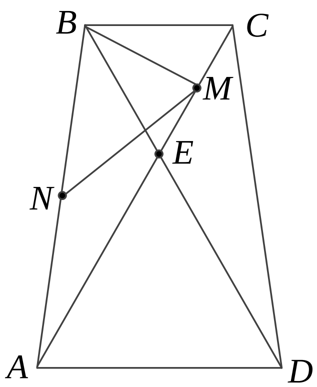
9. Trikampis ABC yra lygiašonis, $AB=AC$, atkarpa AD yra apie šį trikampį apibrėžto apskritimo skersmuo, o taškas O – to apskritimo centras. Atkarpos AD ir BC susikerta taške E, taškas F yra atkarpos OE vidurio taškas. Raskite atkarpos CD ilgį, jei atkarpos BD ir CF yra lygiagrečios ir $BC=2\sqrt{5}$.



Sprendimas. Kadangi taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas, tai $EC=\sqrt{5}$. Kadangi $BD \parallel FC$, tai $\angle DBE=\angle FCE$, todėl statieji trikampiai DBE ir FCE yra lygūs. Taigi $DE=FE$. Žymėkime $ED=FE=OF=x$, tuomet $AE=5x$. Pagal susikertančių stygų teoremą, $AE\cdot ED=BE\cdot EC$, t. y. $5x\cdot x=5$. Taigi $x=1$. Todėl $CD=\sqrt{DE^2+EC^2}=\sqrt{6}$.

Ats.: $\sqrt{6}$.

10. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ pagrindai yra atkarpos AD ir BC, įstrižainės AC ir BD susikerta taške E ir $\angle AED=60^\circ$. Taškai M ir N yra atkarpų EC ir AB vidurio taškai. Raskite santykį $MN:AB$.



Sprendimas. Kadangi $AB=CD$, $\angle ABC=\angle DCB$, tai trikampiai ABC ir DCB yra lygūs, todėl $\angle BCE=\angle EBC$. Iš čia išplaukia, kad trikampis EBC lygiašonis, $EB=EC$. Kadangi $\angle BEC=\angle AED=60^\circ$, tai trikampis EBC yra lygiakraštis. Kadangi taškas M yra kraštinės EC vidurys, tai $\angle EMB=90^\circ$, todėl atkarpa MN yra stačiojo trikampio AMB pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę. Taigi $MN=\frac{1}{2}AB$, t. y. $MN:AB=1:2$.

Ats.: $1:2$.