PASVALIO KRAŠTO
19-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2017 m. lapkričio 24 d.

UŽDAVINIAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Du šimtai natūraliųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_{200}$ surašyti į vieną eilutę taip, kad bet kurių trijų kaimynų suma lygi 200. Pirmas skaičius yra 98, o paskutinis – 19. Kokie kiti skaičiai?

2. Raskite skaičiaus $1+3+3^2+...+3^{2017}$ paskutinį skaitmenį.

3. Įrodykite, kad jei ir skaičius a, ir skaičius b baigiasi skaitmenų pora 76, tai ir jų sandauga $a \cdot b$ baigiasi skaitmenų pora 76.

4. Apskaičiuokite sandaugą
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right).$$

5. Vabalas šliaužia kubo briaunomis, kurių ilgis lygus 1. Pasiekęs viršūnę, jis pasirenka vieną iš trijų briaunų ir šliaužia ja. Apskaičiuokite:
   1) kiek yra kelių iš vienos viršūnės, kai nueinama 4 ilgio vienetai;
   2) kiek tarp tų kelių yra tokių, kurie veda į pradinę viršūnę.

6. Kvadratinių trinarių $f(x)$ ir $g(x)$ vyriausiojo nario koeficientas lygus 1. Taip pat žinoma, kad
$$f(12)+f(20)=g(12)+g(20).$$
Įrodykite, kad yra toks natūralusis skaičius n, kad $f(n)=g(n)$.

7. Tegu k, l, m ir n yra neneigiami sveikieji skaičiai, $k+l=9$ ir $m+n=1$. Raskite didžiausią reiškinio
$$m(k-9n)^2+n(l-9m)^2$$
reikšmę.

8. Apskaičiuokite $x^2+y^2+z^2$, jei $x+y+z=1$ ir $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$

9. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 1, jo kraštinė AD yra apskritimo skersmuo iš viršūnės C nubrėžta to apskritimo liestinė kerta kraštinę AB taške E. Raskite trikampio CBE plotą.

10. Trapecijos $ABCD$ pagrindai yra atkarpos AD ir BC, šoninėje kraštinėje AB pažymėtas taškas E toks, kad $\angle ADE = 54^\circ$, $\angle ECB = 48^\circ$. Raskite kampą DEC.

PASVALIO KRAŠTO
19-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2017 m. lapkričio 24 d.

UŽDAVINIAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Į vieną iš indų A ir B įpilta gryno vandens, o į kitą – gryno spirito. Pradžioje iš indo A į indą B perpilama tiek skysčio, kad inde B skysčio būtų du kartus daugiau negu buvo pradžioje. Tada (gerai sumaišius) iš indo B į indą A perpilama tiek skysčio, kad inde A jo būtų du kartus daugiau negu liko po pirmo perpylimo. Po šių dviejų veiksmų skysčio abiejuose induose pasidarė po lygiai. Be to, inde A spirito dabar yra 3 litrais daugiau negu vandens. Kiek litrų spirito dabar yra inde A?

2. Kortelės sunumeruotos 1, 2, 3, ..., n. Jos suskirstytos į dvi krūveles. Raskite mažiausią kortelių skaičių n, kad ir koks būtų suskirstymas į krūveles bent vienoje krūvelėje būtų dvi kortelės, kurių numerių suma būtų kurio nors sveikojo skaičiaus kvadratas.

3. Jonas atliko 7 testus ir už kiekvieną gavo po skirtingą balų skaičių iš 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99 ir 100. Jis nustatė, kad po kiekvieno testo gautų įvertinimų vidurkis yra sveikasis skaičius. Kiek balų Jonas gavo už šeštą testą, jeigu septintas testas buvo įvertintas 95 balais?

4. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių m, n ir k trejetų $(m; n; k)$, kuriems esant

$$\sqrt{m^n + k!} = 28$$

(čia simboliu $k!$ žymima sandauga $k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ – skaičiaus k faktorialas).

5. Skaičiai $a = \sqrt{10^{4034} - 10^{2017}}$ ir $b = \sqrt{10^{4034} - 10^{2017} + 1}$ suapvalinti vienetų tikslumu. Įrodykite, kad gauti natūralieji skaičiai skiriasi vienetu.

6. Nustatykite, ar dalijant skaičių 444...443 iš 13 galima gauti liekaną, lygią 0. O liekaną 12?

7. Raskite visas realiųjų skaičių a ir b poras $(a; b)$, kurioms esant $a^2 + b^2 = 20$ ir $ab + 6b = 32$.

8. Išspręskite lygtį

$$(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5.$$

9. Trikampis ABC yra lygiašonis, $AB = AC$, atkarpa AD yra apie šį trikampį apibrėžto apskritimo skersmuo, o taškas O – to apskritimo centras. Atkarpos AD ir BC susikerta taške E, taškas F yra atkarpos OE vidurio taškas. Raskite atkarpos CD ilgį, jei atkarpos BD ir CF yra lygiagrečios ir $BC = 2\sqrt{5}$.

10. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ pagrindai yra atkarpos AD ir BC, įstrižainės AC ir BD susikerta taške E ir $\angle AED = 60^\circ$. Taškai M ir N yra atkarpų EC ir AB vidurio taškai. Raskite santykį $MN : AB$.