

**ANTROJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2017 m. kovo 4 d.

UŽDAVINIAI

9 klasės mokiniams

1. Įrodykite, kad bet kuriems teigiamais skaičiams a , b ir c teisinga nelygybė

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

2. Ar panaudojus po lygiai vieną kartą visus dešimt skaitmenų 0, 1, 2, ..., 9 galima užrašyti du natūraliuosius skaičius, kad vienas skaičius būtų kito kvadratas?

Pastaba. Pirmasis skaičiaus skaitmuo negali būti nulis.

3. Atkarpos AD , BE , CF yra trikampio ABC su kampu $\angle A = 120^\circ$ pusiaukampinės. Raskite kampą EDF .
4. Lentelę sudaro 6 eilutės ir 7 stulpeliai. Į visus jos langelius įrašyta po skaičių 0 arba 1. Bet kurių dviejų eilučių skaičių sumos skirtingos, o kiekvieno stulpelio skaičių suma lygi a . Raskite visas galimas a reikšmes.

**ANTROJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2017 m. kovo 4 d.

UŽDAVINIAI

10 klasės mokiniams

1. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (a, b) , kurioms egzistuoja tokie sveikieji skaičiai x ir y , kad

$$8x^4 + 8y^4 = a^4 + 6a^2b^2 + b^4.$$

2. Raskite visas sveikųjų skaičių m ir n poras (m, n) , tenkinančias lygybę

$$m^2 + 2m - 9 = n^2 + n.$$

3. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėtas taškas L . Apie trikampį ACL apibrėžtas apskritimas kerta tiesę BC taške $M \neq C$, o apie trikampį BCL apibrėžtas apskritimas kerta tiesę AC taške $N \neq C$. Raskite kampą tarp tiesių AM ir BN .
4. Lentelę sudaro 6 eilutės ir 7 stulpeliai. Į visus jos langelius įrašyta po skaičių 0 arba 1. Bet kurių dviejų eilučių skaičių sumos skirtingos, o kiekvieno stulpelio skaičių suma lygi a . Raskite visas galimas a reikšmes.

**ANTROJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2017 m. kovo 4 d.

UŽDAVINIAI

11–12 klasių mokiniams

1. Ar egzistuoja trikampis su kraštinių ilgiais x , y ir z , tenkinančiais sąlygą

$$3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 = x^4 + y^4 + z^4?$$

2. Raskite lygties

$$x^2y^2 + 208 = 4(DBD(x, y) + MBK(x, y))^2$$

visus natūraliuosius sprendinius (x, y) . Čia $DBD(x, y)$ ir $MBK(x, y)$ atitinkamai žymi skaičių x ir y didžiausią bendrą daliklį ir mažiausią bendrą kartotinį.

3. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėtas taškas L . Apie trikampį ACL apibrėžtas apskritimas kerta tiesę BC taške $M \neq C$, o apie trikampį BCL apibrėžtas apskritimas kerta tiesę AC taške $N \neq C$. Raskite kampą tarp tiesių AM ir BN .
4. Lentoje užrašytas skaičius 636363. Du žaidėjai A ir B pakaitomis atlieka ėjimus, pirmąjį ėjimą atlieka A . Ėjimo metu reikia nutrinti lentoje esantį skaičių ir užrašyti jo ir bet kurio jo natūraliojo daliklio skirtumą. Žaidėjas, užrašęs skaičių 0, pralaimi. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, ir nurodykite ją.