ŠIRVINTŲ KRAŠTO
PENKTASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2017 m. spalio 20 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Lygiai devintą valandą iš Raseinių į Širvintas išvyko automobilis, o tuo pačiu metu iš Širvintų į Raseinius išvyko motociklas. Tiek automobilis, tiek motociklas važiuoja pastoviu greičiu. Po valandos automobilis buvo pusiaukelėje tarp motociklo ir Raseinių. Kurią valandą automobilis bus pusiaukelėje tarp motociklo ir Širvintų?

Sprendimas. Tegu s yra atstumas tarp Raseinių ir Širvintų, v_a ir v_m – atitinkamai automobilio ir motociklo greitis, o t – laikas nuo išvykimo, kuriam praėjus automobilis bus pusiaukelėje tarp motociklo ir Širvintų. Kadangi po 1 valandos automobilis buvo pusiaukelėje tarp Raseinių ir motociklo, tai gauname lygtį $v_a \cdot 1 = \frac{1}{2}(s - v_m \cdot 1).$ Kad po t valandų automobilis būtų pusiaukelėje tarp motociklo ir Širvintų, turi galioti lygybė $s - v_a \cdot t = \frac{1}{2} v_m \cdot t.$ Iš šių dviejų lygčių gauname, kad $t = 2.$ Taigi automobilis bus pusiaukelėje tarp Širvintų ir motociklo lygiai 11 valandą.

Ats.: 11 valandą.

2. Nustatykite, keliais būdais skaičių 2017 įmanoma užrašyti dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų skirtumu.

Sprendimas. Tegu x ir y yra tokie natūralieji skaičiai, kad

$$x^2 - y^2 = 2017.$$

Kadangi 2017 yra pirminis skaičius, tai lygtis

$$(x - y)(x + y) = 2017$$

yra ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2017. \end{cases}$$

Sudėję abi lygtis, gauname lygtį $2x = 2018,$ kurios sprendinys yra 1009. Tada iš pirmos (taip pat ir antros) lygties išplaukia, kad $y = 1008.$

Taigi tėra viena galimybė skaičių 2017 užrašyti dviejų natūraliųjų skaičių (1009 ir 1008) kvadratų skirtumu.

Ats.: vienu būdu ($2017 = 1009^2 - 1008^2$).

3. Visus 10 skaitmenų (0, 1, 2, 3, ..., 9) išdėstykite eilutėje taip, kad pasirinkus bet kuriuos tris iš eilės parašytus skaitmenis, kurių nors dviejų suma būtų 7.

Sprendimas. Kadangi $7 = 0 + 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4,$ skaitmenys 8 ir 9 turėtų būti kraštiniai. Porų: 0 ir 7, 1 ir 6, 3 ir 4 skaitmenys turi būti greta (rašymo tvarka nesvarbi). Štai keli pavyzdžiai:

80716349, 94361078, 91670438.

Ats.: 80716349, 94361078, 91670438, ...

4. Skaičių 12 345 679 padauginus iš 9, gaunamas skaičius 111 111 111. Iš kokio skaičiaus reikia padauginti skaičių 12 345 679, kad rezultatas būtų 999...9?

Sprendimas. Aišku, kad iš 81.
Ats.: 81.

5. Skaičiaus paskutinis skaitmuo 2. Perkėlus šį skaitmenį į skaičiaus pradžią, gaunamas dvigubai didesnis skaičius. Raskite mažiausią tokią savybę turintį skaičių.

Sprendimas. Tegu $x=\overline{a2},\ a\in\mathbf{N}$, yra ieškomas skaičius. Pagal sąlygą, $\overline{2a}=2x$.

Skaičiaus a skaitmenų skaičių pažymėkime n. Tada $\overline{a2}=10a+2$,

$$\overline{2a}=2\cdot 10^n+a,\quad x=10a+2\ \text{ ir }\ 2x=2\cdot 10^n+a.$$

Iš čia gauname:

$$2\cdot 10^n+a=2(10a+2),$$
$$19a=2\cdot 10^n-4,$$
$$a=\frac{2\cdot 10^n-4}{19}=2\cdot\frac{10^n-2}{19}.$$

Aišku, kuo mažesnis skaičius n, tuo mažesnis ir ieškomas skaičius x. Dalydami skaičių 999...98 iš 19, gauname mažiausią a reikšmę – skaičių

$$a=2\cdot 5\,263\,157\,894\,736\,842=10\,526\,315\,789\,473\,684.$$

Vadinasi, ieškomas skaičius yra

$$105\ 263\ 157\ 894\ 736\ 842.$$

Ats.: 105 263 157 894 736 842.

6. Raskite xy, jei žinoma, kad $x+y=4$ ir $x^3+x^2y+xy^2+y^3=40$.

Sprendimas. Kadangi

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x^3+y^3)+(x^2y+xy^2)=(x+y)(x^2-xy+y^2)+xy(x+y)=$$
$$=(x+y)(x^2+y^2)=(x+y)((x+y)^2-2xy),$$

gauname:

$$\begin{cases}x+y=4,\\ x^3+x^2y+xy^2+y^3=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=4,\\ (x+y)((x+y)^2-2xy)=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=4,\\ 4(4^2-2xy)=40.\end{cases}$$

Iš antros lygties gauname, kad $xy=3$.

Ats.: 3.

7. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x;\ y)$, kurioms esant galioja lygybė $x^2-6xy+13y^2=29$.

Sprendimas. Kadangi $x^2-6xy+13y^2=(x-3y)^2+4y^2$, vietoj pradinės lygties galima nagrinėti lygtį

$$(x-3y)^2=29-4y^2.$$

Aišku, kad $29-4y^2$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas tik kai $y^2=1$. Todėl galimos y reikšmės yra –1 ir 1.

Jei $y=-1$, gauname:

$$(x+3)^2=25\Rightarrow x=-3\pm 5\Rightarrow x=-8 \text{ arba } x=2.$$

Jei $y=1$, gauname:

$$(x-3)^2 = 25 \Rightarrow x = 3 \pm 5 \Rightarrow x = -2 \text{ arba } x = 8.$$

Taigi lygtis $x^2 - 6xy + 13y^2 = 29$ turi keturis sveikuosius sprendinius: (–8; –1), (2; –1), (–2; 1) ir (8; 1).

Ats.: (–8; –1), (2; –1), (–2; 1) ir (8; 1).

8. Ant stalo yra dvi riešutų krūvelės. Dviese Ugnė ir Naglis žaidžia tokį žaidimą – atėjus jo eilei žaidėjas vienos krūvelės riešutus sudeda į krepšelį, o kitą krūvelę padalija (savo nuožiūra) į dvi naujas krūveles. Žaidimą laimi tas, kuriam pasiseka taip padalyti ant stalo paliekamą riešutų krūvelę į dvi, kad kitas žaidėjas nebegalėtų nė vienos iš jų padalyti į dvi.

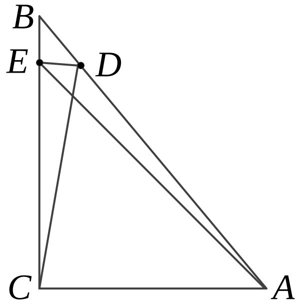
Nustatykite, ar Naglis gali visada laimėti, jei žaidimą pradeda Ugnė, o ant stalo yra 24 riešutai vienoje krūvelėje ir 19 riešutų kitoje.

Sprendimas. Racionaliai žaisdama Ugnė žaidimą gali (visada) laimėti. Jai pakanka į krepšelį sudėti nelyginį riešutų skaičių turinčią krūvelę, o kitą krūvelę padalyti į dvi krūveles taip, kad abiejose krūvelėse būtų po nelyginį riešutų skaičių. Tada Naglis turės dalyti į dvi krūveles nelyginį riešutų skaičių turinčią krūvelę, todėl Ugnė vėl ras ant stalo vieną krūvelę su nelyginiu riešutų skaičiumi, o kitą – su lyginiu skaičiumi. Ji vėl turės galimybę palikti dvi po nelyginį skaičių turinčias riešutų krūveles.

Ats.: Naglis neturi laiminčios strategijos.

9. Trikampio *ABC*, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, kraštinėse *AB* ir *BC* atitinkamai pažymėti taškai *D* ir *E* tokie, kad $\angle EAD = 5^\circ$, $\angle ECD = 10^\circ$. Raskite kampą *EDC*.

Sprendimas. Kadangi $\angle BAC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, tai $\angle CAE = 50^\circ - 5^\circ = 45^\circ = \angle CEA$, taigi $CE = CA$ (1 pav.). Kita vertus, $\angle DCA = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$, todėl $\angle CDA = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ = \angle BAC$, todėl $CD = CA$. Taigi gavome, kad $CE = CD$ ir iš trikampio *CED* randame $\angle EDC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ECD) = 85^\circ$.

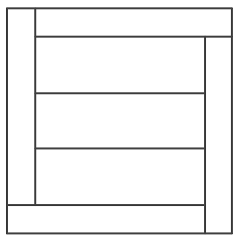


1 pav.

Ats.: 85°.

10. Duotas kvadratas, kurio kraštinė lygi 1. Ar galima šį kvadratą supjaustyti į 7 stačiakampius, taip, kad kiekvieno perimetras būtų lygūs 2?

Spendimas. Visų pirma nupjauname 4 stačiakampius $\frac{7}{8} \times \frac{1}{8}$, kurių perimetrai lygūs 2, po to likusį kvadratą $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ supjaustome į tris stačiakampius $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$, kurių kiekvieno perimetras lygus 2 (2 pav.). Taip uždavinio sąlygoje reikalaujamas supjaustymas atliktas.


2 pav.

Ats.: galima.

ŠIRVINTŲ KRAŠTO
PENKTASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2017 m. spalio 20 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

vyresniųjų klasių mokiniams

1. Pagal testamentą pirklio sūnūs po tėvo mirties gavo tokias jo palikimo dalis (auksinais): vyriausias sūnus gavo 100 auksinų ir $\frac{1}{6}$ to, kas liko; antras (pagal amžių) sūnus gavo 200 auksinų ir $\frac{1}{6}$ to, kas liko, ir t. t. Jauniausias sūnus gavo visus likusius pinigus. Išėjo taip, kad visi sūnūs gavo po lygiai.

Raskite pirklio sūnų skaičių ir jo palikimą (auksinais).

Sprendimas. Tegu a yra pirklio palikimas (auksinais), o n – jo sūnų skaičius. Sūnų gautas palikimo dalis pažymėkime atitinkamai $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n$. Pagal testamentą,

$$a_1 = 100 + \frac{1}{6}(a - 100), \qquad (1)$$

$$a_2 = 200 + \frac{1}{6}((a - a_1) - 200),$$

$$a_3 = 300 + \frac{1}{6}((a - a_1 - a_2) - 300).$$

Remdamiesi sąlyga, kad $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, spręskime lygtį $a_2 = a_1$:

$$200 + \frac{1}{6}((a - a_1) - 200) = 100 + \frac{1}{6}(a - 100),$$

$$1200 + a + a_1 - 200 = 600 + a - 100,$$

$$a_1 = 500.$$

Taigi $a_1 = a_2 = \dots = 500.$

Iš (1) lygties gauname:

$$500 = 100 + \frac{1}{6}(a - 100) \Rightarrow a = 2500.$$

Vadinasi,

$$n = \frac{2500}{500} = 5.$$

Ats.: 5 sūnūs; 2500 auksinų.

2. Nustatykite, keliais būdais skaičių 2017 įmanoma užrašyti dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų skirtumu.

Sprendimas. Tegu x ir y yra tokie natūralieji skaičiai, kad

$$x^2 - y^2 = 2017.$$

Kadangi 2017 yra pirminis skaičius, tai lygtis

$$(x - y)(x + y) = 2017$$

yra ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=2017. \end{cases}$$

Sudėję abi lygtis, gauname lygtį $2x=2018,$ kurios sprendinys yra 1009. Tada iš pirmos (taip pat ir antros) lygties išplaukia, kad $y=1008.$

Taigi tėra viena galimybė skaičių 2017 užrašyti dviejų natūraliųjų skaičių (1009 ir 1008) kvadratų skirtumu.

Ats.: vienu būdu ($2017=1009^2-1008^2$).

3. Apskaičiuokite reiškinio

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}$$

reikšmę, jeigu

$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1.$$

Sprendimas. Iš sąlygos

$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1$$

gauname, kad

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Todėl

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\right)=\left(1+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}\right)+$$
$$+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\right)=1+\left(\frac{c}{c+a}+\frac{b}{b+c}\right)+\left(\frac{a}{c+a}+\frac{c}{c+a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)=1+1+1+1=4.$$

Ats.: 4.

4. Raskite nelygybių sistemos

$$\begin{cases} x>1, \\ x^4>4x-3 \end{cases}$$

sprendinių aibę.

Sprendimas. Antrą nelygybę pertvarkykime taip:

$$x^4-4x+3>0,$$
$$(x^4-x)-(3x-3)>0,$$
$$x(x^3-1)-3(x-1)>0,$$
$$x(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)>0,$$
$$(x-1)(x(x^2+x+1)-3)>0.$$

Jei $x>1,$ tai $x(x^2+x+1)>3.$ O tai reiškia, kad $x^4>4x-3,$ jei $x>1.$ Todėl sistemos sprendinių aibė yra $(1;+\infty).$

Ats.: $(1;+\infty).$

5. Nustatykite, ar bent viena iš lygčių

$$19px^2+mx+95=0 \text{ ir } 95x^2+nx-19p=0$$

turi nors vieną sprendinį, jei p, m, $n\in\mathbf{R}$, $p\neq 0$.

Sprendimas. Pirmos lygties diskriminantą pažymėkime D_1, o antros D_2. Iš formulių

$$D_1=m^2-4\cdot 19p\cdot 95 \text{ ir } D_2=n^2+4\cdot 95\cdot 19p$$

matyti, kad tikrai $D_1>0$, jei $p<0$, ir tikrai $D_2>0$, jei $p>0$.

O tai reiškia, kad viena iš dviejų lygčių tikrai turi du skirtingus sprendinius.

Ats.: viena lygtis tikrai turi du sprendinius.

6. Reiškinio $\frac{2a^2}{1+a^2}$ reikšmė, kai $a=x$, lygi y, o jo reikšmė, kai $a=y$, lygi x. Raskite visas tokių realiųjų skaičių x ir y poras $(x;\, y)$.

Sprendimas. Remdamiesi sąlyga, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2}{1+x^2}=y,\\[2mm] \dfrac{2y^2}{1+y^2}=x.\end{cases}$$

Atėmę antrą lygtį iš pirmos lygties, gauname:

$$\frac{2x^2}{1+x^2}-\frac{2y^2}{1+y^2}=y-x,$$

$$\frac{2x^2-2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=y-x,$$

$$\frac{2(x-y)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}+(y-x)=0,$$

$$(x-y)\left(\frac{2(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}+1\right)=0.$$

Kadangi $x\geq 0$ ir $y\geq 0$, tai $\frac{2(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}+1>0.$ Todėl būtinai $x-y=0$, t. y. $y=x$.

Tada iš pirmos lygties gauname:

$$\frac{2x^2}{1+x^2}=x \Rightarrow x\left(\frac{2x}{1+x^2}-1\right)=0 \Rightarrow x(2x-1-x^2)=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ arba } x=1.$$

Vadinasi, lygčių sistema turi du sprendinius $(x;\, y)$: (0; 0) ir (1; 1).

Ats.: (0; 0) ir (1; 1).

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}x^2-6yz+2y^2=1,\\ 3y^2-4xy+9z^2=-1.\end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję abi lygtis, gauname lygtį $x^2+5y^2+9z^2-4xy-6yz=0.$ Ją spręskime taip:

$$(x^2-4xy+4y^2)+(y^2-6yz+9z^2)=0,$$

$$(x-2y)^2+(y-3z)^2=0.$$

Matome, kad būtinai $x-2y=0$ ir $y-3z=0$. Iš čia išplaukia, kad

$$x=2y \text{ ir } z=\frac{1}{3}y.$$

Įrašę šias išraiškas į pirmą lygtį, gausime:

$$(2y)^2-6y\cdot\frac{1}{3}y+2y^2=1 \Rightarrow 4y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}.$$

O tada $x=\pm 1$ ir $z=\pm\frac{1}{6}$.

Taigi lygčių sistema turi du sprendinius: $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$ ir $\left(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$.

Ats.: $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$, $\left(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$.

8. Ant stalo yra dvi riešutų krūvelės. Dviese Ugnė ir Naglis žaidžia tokį žaidimą – atėjus jo eilei žaidėjas vienos krūvelės riešutus sudeda į krepšelį, o kitą krūvelę padalija (savo nuožiūra) į dvi naujas krūveles. Žaidimą laimi tas, kuriam pasiseka taip padalyti ant stalo paliekamą riešutų krūvelę į dvi, kad kitas žaidėjas nebegalėtų nė vienos iš jų padalyti į dvi.

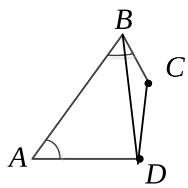
Nustatykite, ar Naglis gali visada laimėti, jei žaidimą pradeda Ugnė, o ant stalo yra 23 riešutai vienoje krūvelėje ir 27 riešutai kitoje.

Sprendimas. Kadangi abiejose krūvelėse yra po nelyginį riešutų skaičių, Ugnė paliks ant stalo vieną krūvelę su lyginiu, o kitą su nelyginiu riešutų skaičiumi. Tada Naglis turėtų į krepšelį sudėti nelyginį skaičių turinčią riešutų krūvelę, o kitą padalyti į dvi taip, kad abiejose būtų po nelyginį riešutų skaičių. Tada jis (atėjus eilei) vėl ras vieną krūvelę su lyginiu, o kitą su nelyginiu riešutų skaičiumi. Taigi jis tikrai gali laimėti žaidimą.

Ats.: Naglis turi laiminčią strategiją.

9. Iškilojo keturkampio $ABCD$, $BC=1$, $AD=3$, kampai ABC ir BAD yra lygūs. Įrodykite, kad $CD>2$.

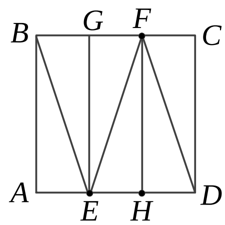
Įrodymas. Kadangi atkarpa BD yra keturkampio įstrižainė, tai $\angle ABD<\angle ABC$, t. y. $\angle ABD<\angle BAD$. Kadangi trikampyje ABD prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė, tai $BD>AD$, t. y. $BD>3$. Pagal trikampio nelygybę, $BC+CD>BD$, todėl $CD>BD-BC>2$.



1 pav.

10. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje AD pasirinktas taškas E, o kraštinėje BC – taškas F taip, kad $BE=EF=FD=30$. Raskite kvadrato $ABCD$ plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus a, o EG ir FH yra trikampių BEF ir DEF aukštinės (2 pav.). Iš stačiųjų trikampių EAB, EGB, EGF, FHE, FHD, FDC lygumo gauname, kad $AE=EH=HD=BG=GF=FC=\frac{a}{3}$. Tuomet iš trikampio ABE (pagal Pitagoro teoremą) gauname, kad $EB^2=AB^2+AE^2$, t. y. $30^2=a^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2$.



2 pav.

Iš čia išplaukia, kad $a^2=810$.

Ats.: 810.