ŠIRVINTŲ KRAŠTO
KETVIRTASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS
TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2016 m. spalio 21 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 bet kuria tvarka surašomi uždaru ratu. Tada jungiant (pagal laikrodžio rodyklę) po tris iš eilės einančius skaičius sudaromi 9 triženkliai skaičiai. Raskite šių triženklių skaičių sumą.

Sprendimas. Pirmą skaičių pažymėkime a_1, antrą – a_2, trečią – a_3 ir t. t. Paskutinis skaičius bus a_9. Pagal sąlygą, turime apskaičiuoti sumą

$$\overline{a_1a_2a_3}+\overline{a_2a_3a_4}+\overline{a_3a_4a_5}+\ldots+\overline{a_7a_8a_9}+\overline{a_8a_9a_1}+\overline{a_9a_1a_2}=$$
$$=(100a_1+10a_2+a_3)+(100a_2+10a_3+a_4)+(100a_3+10a_4+a_5)+\ldots+$$
$$+(100a_7+10a_8+a_9)+(100a_8+10a_9+a_1)+(100a_9+10a_1+a_2).$$

Šios sumos dėmenis galima pergrupuoti taip:

$$100(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_7+a_8+a_9)+10(a_2+a_3+a_4+\ldots+a_8+a_9+a_1)+$$
$$+(a_3+a_4+a_5+\ldots+a_9+a_1+a_2).$$

Taigi ieškomoji suma yra

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_7+a_8+a_9)(100+10+1)=(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot 111=$$
$$=45\cdot 111=4995.$$

Ats.: 4995.

2. Atsukus karšto vandens čiaupą, vonia pripildoma per 23 minutes, o atsukus šalto vandens čiaupą – per 17 minučių. Šeimininkė iš pradžių atsuko karšto vandens čiaupą. Po kelių minučių ji turėtų atsukti dar ir šalto vandens čiaupą, kad pilnoje vonioje karšto vandens būtų 1,5 karto daugiau negu šalto?

Sprendimas. Tegu v yra vonios talpa, v_1 – karšto vandens kiekis, o v_2 – šalto vandens kiekis pripildytoje vonioje. Pagal uždavinio sąlygą, $v_1=1{,}5v_2$. Įrašę $v_2=v-v_1$, gauname:

$$v_1=1{,}5(v-v_1)\Rightarrow 2{,}5v_1=1{,}5v\Rightarrow v_1=0{,}6v.$$

Šalto vandens kiekis turi būti $0{,}4v$.

Reikiamas karšto vandens kiekis pribėga per $0{,}6v:\frac{v}{23}=13{,}8$ minučių, o reikiamas šalto vandens kiekis – per $0{,}4v:\frac{v}{17}=6{,}8$ minučių. Vadinasi, šalto vandens čiaupą reikia įjungti po $13{,}8-6{,}8=7$ minučių.

Ats.: Po 7 minučių.

3. Du dviratininkai važiuoja (pastoviu greičiu) ratu, kurio ilgis 170 metrų. Važiuodami priešingomis kryptimis, jie susitinka kas 10 sekundžių. O kai abu važiuoja ta pačia kryptimi, vienas pasiveja kitą kas 170 sekundžių. Apskaičiuokite dviratininkų greitį.

Sprendimas. Tegu x yra pirmo dviratininko greitis, o y – antro dviratininko greitis.

Per 10 sekundžių pirmas dviratininkas nuvažiuoja $10x$ metrų, o antras (kai važiuoja priešinga krytimi) $170-10x$ metrų. Kita vertus, tas atstumas lygus $10y$ metrų. Gauname lygtį $170-10x=10y.$ Pagal antrą sąlygos dalį gauname lygtį $170x-170y=170.$

Pirmą lygtį padalijęs iš 10, o antrą – iš 170, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=17, \\ x-y=1, \end{cases}$$

iš kurios išplaukia, kad $x=9$ ir $y=8.$

Ats.: 9 m/s ir 8 m/s.

4. Nustatykite, ar įmanoma kvadratą, kurio kraštinė 1,5 m, uždengti trimis kvadratais, kurių kraštinė lygi 1 m?

Sprendimas. Vienu vienetiniu kvadratu neįmanoma uždengti dviejų (net gretimų) didžiojo kvadrato viršūnių, nes jo įstrižainė yra trumpesnė už didžiojo kvadrato kraštinę. Vadinasi, visoms viršūnėms uždengti reikia keturių kvadratų.

Ats.: Neįmanoma.

5. Lentoje yra užrašyti septyni skirtingi natūralieji skaičiai. Lygiai penki iš jų dalijasi iš 3, lygiai penki – iš 5 ir lygiai penki – iš 7. Tegu m yra didžiausias iš visų septynių skaičių. Kokia galėtų būti mažiausia m reikšmė?

Sprendimas. Nesunku suprasti, kad bent vienas iš parašytų skaičių turi dalytis ir iš 3, ir iš 5, ir iš 7. Mažiausias toks skaičius yra $3\cdot5\cdot7=105.$

Skaičių 15, 21, 30, 35, 42, 70 ir 105 rinkinys tenkina visas uždavinio sąlygas. Todėl 105 yra ieškomas mažiausias skaičius.

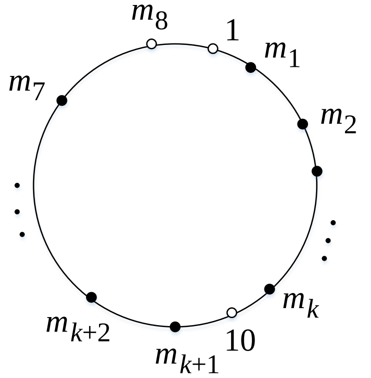
Ats.: 105.

6. Iš pradžių juodu rašikliu kuria nors tvarka ratu surašomi visi skaičiai nuo 1 iki 10. Tada raudonu rašikliu į kiekvieną gretimų skaičių tarpą įrašomas didesnio ir mažesnio skaičiaus skirtumas. Nustatykite, kokia galėtų būti pati mažiausia raudonųjų skaičių suma.

Sprendimas. Tarkime, kad skaičiai nuo 1 iki 10 surašyti tokia tvarka (einant pagal laikrodžio rodyklę):

$$1,\ m_1,\ m_2,\ ...,\ m_k,\ 10,\ m_{k+1}, ...,\ m_7,\ m_8$$

(žr. pav.). Aišku, gali būti ir atvejis, kai 1 ir 10 yra gretimi skaičiai.



Iš pradžių sudėkime raudonuosius skaičius, eidami nuo 1 iki 10 pagal laikrodžio rodyklę. Gausime:

$$|m_1-1|+|m_2-m_1|+...+|m_k-m_{k-1}|+|10-m_k|\geq$$
$$\geq(m_1-1)+(m_2-m_1)+...+(m_k-m_{k-1})+(10-m_k)=9.$$

Eidami nuo 1 iki 10 prieš laikrodžio rodyklę, gausime:

$$|m_8-1|+|m_7-m_8|+...+|m_{k+1}-m_{k+2}|+|10-m_{k+1}|\geq$$
$$\geq(m_8-1)+(m_7-m_8)+...+(m_{k+1}-m_{k+2})+(10-m_{k+1})=9.$$

Taigi bendra raudonųjų skaičių suma negali būti mažesnė už $9+9=18.$

O lygią 18 raudonųjų skaičių sumą galima gauti surašius skaičių nuo 1 iki 10 jų didėjimo tvarka.

Vadinasi, pati mažiausia raudoųjų skaičių suma yra 18.

Ats.: 18.

7. Raskite tokį natūralųjį skaičių A, sudarytą iš nelygių nuliui skaitmenų, kad jo ir skaičiaus B, gauto iš A išbraukus kurį nors vieną jo skaitmenį, suma būtų lygi 1579.

Sprendimas. Aišku, kad A yra keturženklis skaičius, kurio pirmas skaitmuo 1.

Tegu $A = \overline{1xyz}.$ Nesunku suprasti, kad B gali būti tik $\overline{1xy}$, nes sudėję skaičių A su skaičiumi $\overline{xyz},$ $\overline{1yz}$ arba $\overline{1xz}$ gautume lyginę sumą.

Iš lygybės $A + B = 1579$ gauname:

$$(\overline{1xy} \cdot 10 + z) + \overline{1xy} = 1579,$$
$$11B + z = 1579,$$
$$B + \frac{z}{11} = 143 + \frac{6}{11}.$$

Vadinasi, $B = 143,$ $z = 6$ ir (todėl) $A = 1436.$

Ats.: 1436.

8. Skaičius a yra lygties $x^3 - 12x + 8 = 0$ sprendinys. Nustatykite, ar skaičius $2 - \frac{4}{a}$ taip pat yra šios lygties sprendinys.

Sprendimas. Reikia patikrinti, ar galioja lygybė $\left(2 - \frac{4}{a}\right)^3 - 12\left(2 - \frac{4}{a}\right) + 8 = 0.$

Skaičiuodami gauname:

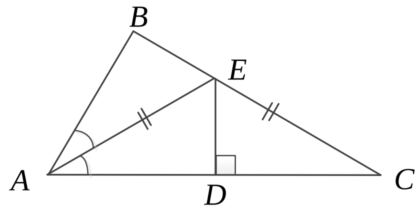
$$\left(2 - \frac{4}{a}\right)^3 - 12\left(2 - \frac{4}{a}\right) + 8 = 8 - \frac{48}{a} + \frac{96}{a^2} - \frac{64}{a^3} - 24 + \frac{48}{a} + 8 =$$
$$= \frac{96}{a^2} - \frac{64}{a^3} - 8 = \frac{8}{a^3}(12a - 8 - a^3) = -\frac{8}{a^3}(a^3 - 12a + 8) = 0,$$

nes $a^3 - 12a + 8 = 0.$

Ats.: $2 - \frac{4}{a}$ yra lygties sprendinys.

9. Trikampyje ABC galioja lygybė $AC = 2AB,$ pusiaukampinė AE lygi atkarpai EC. Raskite kampą ABC.

Sprendimas. Nubrėžkime $ED \perp AC.$ Kadangi (pagal sąlygą) trikampis AEC lygiašonis, tai atkarpa ED yra ne tik trikampio AEC aukštinė, bet ir pusiaukraštinė. Taigi taškas D yra kraštinės AC vidurys, todėl $AD = DC = AB.$ Trikampiai ABE ir ADE lygūs (nes $\angle BAE = \angle DAE,$ $AD = AB,$ o kraštinė AE bendra). Iš trikampių lygumo išplaukia, kad $\angle ABC = \angle ADE = 90°.$



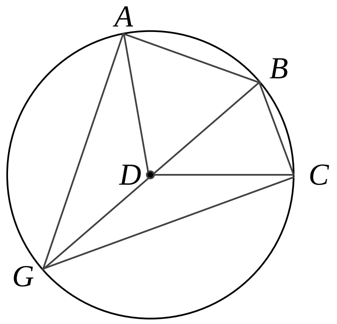
Ats.: 90°.

10. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinė AD lygi kraštinei CD, $\angle ADB = 60°$, $\angle BDC = 40°$ ir $\angle ABC = 130°$. Raskite kampą BAC.

Sprendimas. Nubrėžkime apskritimą, kurio centras yra taškas D o spindulys lygus AD. Sakykime, kad tiesė BD kerta apskritimo lanką AC taške G (taškas D yra atkarpoje BG). Kadangi kampas AGC yra įbrėžtinis, o kampas ADC – centrinis, tai

$$\angle AGC = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 50°.$$

Kadangi $\angle AGC + \angle ABC = 180°$, tai taškas B irgi yra šiame apskritime. Tada $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BDC = 20°$.



Ats.: 20°.

ŠIRVINTŲ KRAŠTO KETVIRTASIS KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija, 2016 m. spalio 21 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Sveikieji skaičiai *m, n* ir *k* yra tokie, kad $k^2 - m^2 - n^2 = 2(m-n)(k-m+n)$. Įrodykite, kad 2*mn* yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Lygybę $k^2 - m^2 - n^2 = 2(m-n)(k-m+n)$ pertvarkykime taip:

$$k^2 - m^2 - n^2 = 2(mk - m^2 + mn - nk + nm - n^2),$$
$$k^2 - m^2 - n^2 = 2mk - 2m^2 + 4mn - 2nk - 2n^2,$$
$$k^2 + m^2 + n^2 - 2mk - 2mn + 2nk = 2mn,$$
$$(k-m+n)^2 = 2mn.$$

Ats.: $2mn = (k-m+n)^2$.

2. Nustatykite, ar yra bent vienas natūraliųjų skaičių *a, b* ir *c* trejetas, kuriam esant

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 340.$$

Sprendimas. Skaičiaus 340 pirminiai dalikliai yra 2, 5 ir 17, o patį skaičių galima užrašyti taip: $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$.

Tarp skaičių $a+b$, $b+c$ ir $c+a$ gali būti tik vienas lyginis skaičius, nes esant dviems lyginiams ir trečias turėtų būti lyginis, o tai neįmanoma , nes skaičiaus 340 skaidinyje nėra 8. Be to, kiekvienas iš skaičių $a+b$, $b+c$ ir $c+a$ turi būti nemažesnis už 2.

Vadinasi, pakanka išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} a+b=4, \\ b+c=5, \\ c+a=17. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties gauname, kad $a = 4-b$, iš antros – $c = 5-b$, o įrašę į trečią lygtį gauname: $(5-b)+(4-b) = 17 \Rightarrow b = -4$.

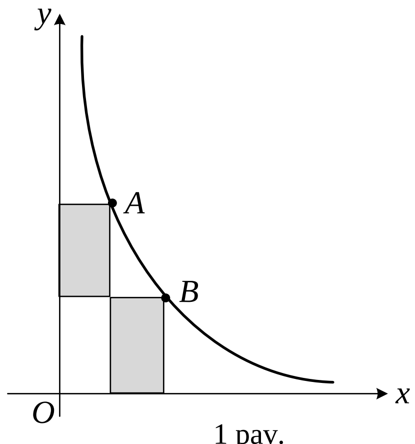
Taigi nėra tokio natūraliųjų skaičių *a, b* ir *c* trejeto, kad galiotų lygybė

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 340.$$

Ats.: Nėra.

3. Stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje nubrėžtas funkcijos $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$, grafikas.

Pasirinkus du skirtingus taškus *A* ir *B* nubrėžti statmenys į koordinačių sistemos ašis (žr. 1 pav.). Nustatykite, kurio nuspalvinto stačiakampio plotas yra didesnis.



1 pav.

Sprendimas. Tegu taško *A* koordinatės yra $(a_1; a_2)$, o taško *B* – $(b_1; b_2)$.

Tada (žr. 2 pav.) viršutinio stačiakampio ilgis yra a_1, o plotis $a_2 - b_2$; apatinio stačiakampio ilgis yra $b_1 - a_1$, o plotis b_2.

Pirmo stačiakampio plotas lygus $a_1(a_2 - b_2)$, o antro – $(b_1 - a_1)b_2$.

Kadangi *A* ir *B* yra kreivės $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$, taškai, tai $a_2 = \frac{k}{a_1}$ ir $b_2 = \frac{k}{b_1}$.

Įrašę į ploto formules, gausime, kad

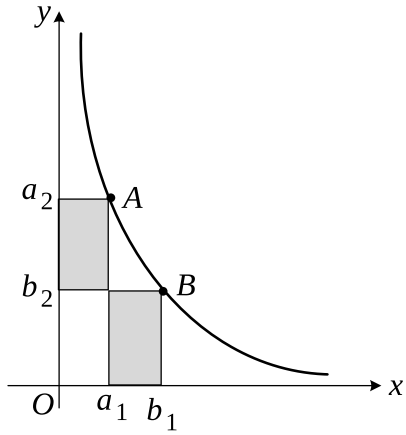
$$a_1(a_2-b_2)=a_1\left(\frac{k}{a_1}-\frac{k}{b_1}\right)=\frac{k(b_1-a_1)}{b_1}$$

ir

$$(b_1-a_1)b_2=(b_1-a_1)\cdot\frac{k}{b_1}.$$

Matome, kad abiejų stačiakampių plotai yra vienodi.

Ats.: Vienodi.



2 pav.

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3},\\[2mm] \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{5},\\[2mm] \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{24}{7}.\end{cases}$$

Sprendimas. Aišku, kad negali būti nei $x=0,$ nei $y=0,$ nei $z=0.$ Pirmos lygties kairės pusės trupmenos skaitiklį ir vardiklį padalykime iš *xy*, antros lygties – iš *yz*, o trečios lygties – iš *zx*. Gausime sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=\dfrac{8}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}=\dfrac{12}{5},\\[2mm] \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}=\dfrac{24}{7}.\end{cases}$$

Pažymėkime: $u=\dfrac{1}{x},\ v=\dfrac{1}{y},\ w=\dfrac{1}{z}.$

Tada gausime:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{v+u}=\dfrac{8}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{w+v}=\dfrac{12}{5},\\[2mm] \dfrac{1}{u+w}=\dfrac{24}{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u+v=\dfrac{3}{8},\\[2mm] v+w=\dfrac{5}{12},\\[2mm] w+u=\dfrac{7}{24}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{3}{8}-v,\\[2mm] w=\dfrac{5}{12}-v,\\[2mm] \left(\dfrac{5}{12}-v\right)+\left(\dfrac{3}{8}-v\right)=\dfrac{7}{24}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{3}{8}-v,\\[2mm] w=\dfrac{5}{12}-v,\\[2mm] v=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{1}{8},\\[2mm] w=\dfrac{1}{6},\\[2mm] v=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Vadinasi, $x=\dfrac{1}{u}=8,\ y=\dfrac{1}{v}=4,\ z=\dfrac{1}{w}=6.$

Ats.: $x=8,\ y=4,\ z=6.$

5. Gimnazistas Jonas lentoje užrašė savo sugalvotą skaičių *A*, tarp kurio skaitmenų nėra nulių, ir skaičių *B*, gautą iš *A*, nubraukus vieną jo skaitmenį. Sudėjęs *A* ir *B* gavo 2016. Tada jo klasės draugė Agnė užrašė mažesnį už *A* skaičių *C*, taip pat neturintį nė vieno nulio, ir skaičių *D*, gautą iš *C*, nubraukus vieną jo skaitmenį. Sudėjusi *C* ir *D* gavo 2017. Raskite Jono sugalvotą skaičių *A*.

Sprendimas. Aišku, kad tiek skaičiaus *A*, tiek skaičiaus *C* pirmas skaitmuo yra 1.

Tegu $C=\overline{1xyz}.$ Jei Agnė būtų nubraukusi pirmą, antrą arba trečią skaitmenį, skaičiaus *D* vienetų skaitmuo būtų *z*. Todėl *C* ir *D* suma būtų lyginis skaičius. Vadinasi, Agnė nubraukė vienetų skaitmenį *z* ir gavo skaičių $D=\overline{1xy}.$

Kadangi $C=\overline{1xy}\cdot 10+z=10D+z,$ gauname lygtį $(10D+z)+D=2017.$ Spręsdami gauname:

$$11D + z = 2017,$$
$$11D + z = 11\cdot 183 + 4,$$
$$11(D-183) + (z-4) = 0.$$

Taigi $D = 183,\ z = 4$ ir $C = 1834.$

Kadangi $A > C,$

$$B = 2016 - A = 2017 - (A+1) < 2017 - C = 183.$$

Tai reiškia, kad Jonas nubraukė skaičiaus *A* antrą skaitmenį.

Tarę, kad $A = \overline{1xyz},$ gautume, kad $B = \overline{1yz}.$ O tada

$$\overline{1xyz} + \overline{1yz} = 2016,$$
$$(10+x)\cdot 100 + (10y+z) + 100 + (10y+z) = 2016,$$
$$(11+x)\cdot 100 + 2(10y+z) = 2016.$$

Jei $x = 8,$ tai $2(10y+z) = 116 \Rightarrow 10y + z = 58 \Rightarrow y = 5,\ z = 8.$

Jei $x = 9,$ tai $2(10y+z) = 16 \Rightarrow 10y + z = 8 \Rightarrow y = 0,\ z = 8.$

Taigi $A = 1858.$

Ats.: 1858.

6. Šachmatų varžybose tarp studentų grupių *A* ir *B* kiekvienas vienos grupės studentas turėjo sužaisti su kiekvienu kitos grupės studentu po vieną partiją. Bet į varžybas neatvyko vienas grupės *A* studentas ir vienas grupės *B* studentas, todėl bendras sužaistų partijų skaičius sumažėjo 20 procentų. Nustatykite, kiek studentų dalyvavo šiose šachmatų varžybose.

Sprendimas. Tegu *m* yra varžybose dalyvavusių pirmos grupės, o *n* – antros grupės studentų skaičius. Tada $(m+1)(n+1)$ yra planuotas partijų skaičius, o mn – varžybose sužaistų partijų skaičius. Pagal uždavinio sąlygą $mn = 0{,}8(m+1)(n+1).$ Iš čia gauname: $5mn = 4(mn + m + n + 1),$ $mn - 4m - 4n = 4,$ $(mn - 4m) - (4n - 16) = 20,$ $(m-4)(n-4) = 20.$

Kadangi $20 = 1\cdot 20 = 2\cdot 10 = 4\cdot 5,$ tai galimos skaičių $m-4$ ir $n-4$ poros $(m-4;\, n-4)$ yra

(1; 20), (2; 10), (4; 5), (5; 4), (10; 2), (20; 1).

Tada skaičių $(m;\, n)$ poros yra tokios:

(5; 24), (6; 14), (8; 9), (9; 8), (14; 6), (24; 5).

Taigi $m + n \in \{17;\, 20;\, 29\}.$

Ats.: 17, 20 arba 29.

7. Raskite visas natūraliųjų skaičių *x* ir *y* poras (*x*; *y*), kurioms esant galioja lygybė

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 = 100.$$

Sprendimas. Kadangi $x^3 + 3x^2y - 4y^3 = (x^3 - y^3) + (3x^2y - 3y^3) =$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3y(x-y)(x+y) = (x-y)(x^2 + 4xy + 4y^2) = (x-y)(x+2y)^2,$$

tai nagrinėjamą lygybę galima užrašyti taip: $(x-y)(x+2y)^2 = 100.$

Abu skaičiai (*x* ir *y*) turi būti natūralieji, todėl iš sąlygos $x - y \geq 1$ gauname, kad $x \geq 2.$ O tada $x + 2y \geq 4.$

Kita vertus, turi galioti ir nelygybė $x + 2y \leq 10.$

Taigi tikslinga nagrinėti tik tuos atvejus, kai $x + 2y \in \{4;\, 5;\, 6;\, 7;\, 8;\, 9;\, 10\}.$ Bet atvejus $x + 2y \in \{4;\, 6;\, 7;\, 8;\, 9\}$ reikia atmesti, nes 100 nesidalija nei iš $4^2 = 16,$ nei iš $6^2 = 36,$ nei iš $7^2 = 49,$ nei iš $8^2 = 64,$ nei iš $9^2 = 81.$ Belieka atvejai $x + 2y = 5$ ir $x + 2y = 10.$

Jei $x + 2y = 5,$ tai $x - y = 4.$ Bet jokia natūraliųjų skaičių *x* ir *y* pora netenkina šių sąlygų, nes lygčių sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x - \ \, y = 4 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį – skaičių porą $\left(\dfrac{13}{3};\, \dfrac{1}{3}\right).$

Atveju $x + 2y = 10$ reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+2y=10, \\ x-\ \ y=\ \ 1. \end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį – natūraliųjų skaičių porą (4; 3).

Ats.: (4; 3).

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius *m*, kuriems esant galioja lygybė

$$m^2+13m+30=m!$$

(čia $m!=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ yra skaičiaus *m* faktorialas).

Sprendimas. Kadangi $m\ge 1,$ tai $m^2+13m+30\ge 44.$

Nagrinėdami nelygybę $m!\ge 44,$ gauname, kad mažiausia *m* reikšmė galėtų būti 5, nes $4!=24<44,$ $5!=120>44.$

Įrašę $m=5$ į lygybės kairę pusę gauname, kad $m^2+13m+30=5^2+13\cdot 5+30=120.$

Taigi $m=5$ yra vienas iš ieškomų skaičių.

Aiškinkimės, ar gali būti $m\ge 6.$ Remdamiesi faktorialo apibrėžimu, tada gautume, kad $m!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot m>2\cdot 3\cdot(m-1)\cdot m=6(m-1)m.$ Todėl turėtų galioti nelygybė

$$m^2+13m+30>6(m-1)m.$$

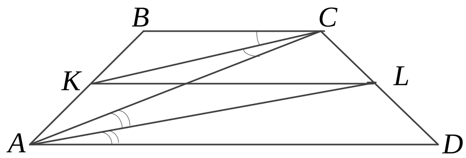
Nagrinėdami ją, gauname: $m^2+13m+30>6m^2-6m,$ $5m^2-19m-30<0,$ $5\left(m+\dfrac{6}{5}\right)(m-5)\le 0.$

Pastarosios nelygybės sprendiniai sudaro realiųjų skaičių intervalą $\left(-\dfrac{6}{5};5\right)$, kurio taškai (skaičiai) netenkina sąlygos $m\ge 6.$

Vadinasi, lygybė $m^2+13m+30=m!$ negalima, kai $m\ge 6.$ Skaičius $m=5$ yra vienintelis natūralusis skaičius, kuris ją tenkina.

Ats.: 5.

9. Trapecijos *ABCD* pagrindai $AD=9,$ $BC=4.$ Šoninėse kraštinėse *AB* ir *CD* atitinkamai pažymėti taškai *K* ir *L* tokie, kad tiesės *KL* ir *AD* yra lygiagrečios. Be to, $\angle BCK=\angle ACK$ ir $\angle CAL=\angle DAL.$ Raskite trapecijos įstrižainės *AC* ilgį.



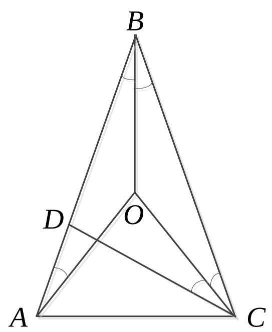
Sprendimas. Kadangi atkarpa *CK* yra trikampio *ACB* pusiaukampinė, tai $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{AC}{BC}.$ Analogiškai atkarpa *AL* yra trikampio *DAC* pusiaukampinė, todėl $\dfrac{DL}{LC}=\dfrac{AD}{AC}.$ Kadangi tiesės *KL* ir *AD* yra lygiagrečios, tai $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{DL}{LC}.$ Iš šių lygybių išplaukia, kad $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{DL}{LC}=\dfrac{AD}{AC}.$ Iš čia gauname, kad $AC^2=AD\cdot BC=4\cdot 9=36,$ t. y. $AC=6.$

Ats.: 6.

10. Atkarpa *CD* yra trikampio *ABC* pusiaukampinė, į trikampį *BCD* įbrėžto apskritimo centras sutampa su apie trikampį *ABC* apibrėžto apskritimo centru. Raskite trikampio *ABC* kampus.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas *O* yra į trikampį *BCD* įbrėžto apskritimo centras ir apie trikampį *ABC* apibrėžto apskritimo centras. Tai reiškia, kad tiesės *BO* ir *CO* yra kampų *ABC* ir *BCD* pusiaukampinės ir $AO=BO=CO.$ Pažymėkime $\angle ABO=\alpha.$ Tuomet $\angle OAB=\alpha$ (nes trikampis *AOB* lygiašonis) ir $\angle OCB=\angle OBC=\alpha.$ Kadangi $\angle BCD=2\alpha,$ o atkarpa *CD* yra trikampio pusiaukampinė, tai $\angle ACD=2\alpha$ ir $\angle OCA=\angle OAC=3\alpha.$ Taigi trikampio *ABC* kampų didumai yra 2α, 4α, 4α. Jų suma lygi 10α, todėl $\alpha=18°.$ Iš čia išplaukia, kad

$$\angle B=36°,\ \angle A=\angle C=72°.$$



Ats.: 36°, 72° ir 72°.