ŠIRVINTŲ KRAŠTO
KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS
TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2013 m. spalio 18 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Kiek yra triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus pirmųjų dviejų skaitmenų sandaugai?

Sprendimas. Tegu $\overline{abc}$ yra triženklis skaičius. Pagal uždavinio sąlygą $c = a \cdot b,\ \ a \neq 0.$ Aišku, kad $0 \leq ab \leq 9.$ Jei $a = 1,$ tai gauname 10 skirtingų b reikšmių. Jei $a = 2,$ gauname 5 skirtingas b reikšmes. Jei $a = 3,$ tai gauname 4 skirtingas b reikšmes. Jei $a = 4,$ tai gauname 3 skirtingas b reikšmes. Kitais atvejais gauname po 2 skirtingas b reikšmes.

Taigi iš viso yra

$$10+5+4+3+2+2+2+2+2=32$$

triženkliai skaičiai, kurie tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 32.

2. Raskite du triženklius skaičius, iš kurių vienas yra 7 kartus didesnis už kitą, o jų suma dalijasi iš 424.

Sprendimas. Tegu a ir b yra ieškomieji skaičiai. Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} a = 7b, \\ a + b = 424k; \end{cases}$$

čia $100 \leq b < a \leq 999,$ k – natūralusis skaičius.

Spręsdami ją, gauname, kad $b = 53k$ ir $a = 371k.$ Aišku, kad galima tik viena reikšmė $k = 2.$ Todėl $b = 106$ ir $a = 742.$

Ats.: 106 ir 742.

3. Dviejų realiųjų skaičių suma lygi 2. Įrodykite, kad jų sandauga negali būti didesnė už 1.

Įrodymas. Pirmas būdas. Tegu m ir n yra realieji skaičiai, kurių suma lygi 2.
Iš sąlygos $m + n = 2,$ gauname:

$$1-mn=1-m(2-m)=1-2m+m^2=(1-m)^2 \geq 0.$$

Taigi $mn \leq 1.$

Antras būdas. Tegu $m = 1 + x,\ \ n = 1 - x,\ \ x$ – bet kuris realusis skaičius. Tada $m + n = 2$ ir

$$1-mn=1-(1+x)(1-x)=1-(1-x^2)=x^2 \geq 0.$$

Taigi $mn \leq 1.$

4. Dviem skirtingos talpos sunkvežimiais krovinį galima pervežti penkiais reisais. Jeigu krovinį vežtų tik vienas sunkvežimis, tai jam reiktų 15 reisų, kad pervežtų 75 % krovinio. Kelis kartus daugiau krovinio galima pervežti didesnės talpos sunkvežimiu?

Sprendimas. Tegu vienu sunkvežimiu galima pervežti a tonų krovinio, o kitu – b tonų krovinio ir $a < b.$ Pagal sąlygą viso krovinio svoris yra $5(a+b)$ tonų. Be to, turi galioti lygybė $15a = 5(a+b)\cdot 0{,}75.$ Iš čia gauname, kad $3a = b.$

Ats.: 3 kartus.

5. Dvidešimt penki mandarinai kainuoja tiek litų, kiek mandarinų galima nupirkti už vieną litą. Kiek mandarinų galima nupirkti už tris litus?

Sprendimas. Tegu x (litų) yra 25 mandarinų kaina. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė

$$\frac{x}{25} = \frac{1}{x}.$$

Iš čia, gauname $x = 5.$ Vadinasi, už vieną litą galima nupirkti 5 mandarinus, o už 3 litus galima nupirkti 15 mandarinų.

Ats.: 15.

6. Taros supirktuvė priima 0,5 *l*, 0,7 *l* ir 1 *l* stiklainius. Jau supirktų 2500 stiklainių bendra talpa yra 2013 litrų. Įrodykite, kad tarp jų yra bent vienas 0,5 *l* talpos stiklainis.

Įrodymas. Prieštaraudami teiginiui, tarkime, kad supirktuvėje nėra 0,5 *l* talpos stiklainių, o 0,7 *l* talpos stiklainių skaičių pažymėkime *x*. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė

$$0{,}7\cdot x + (2500 - x)\cdot 1 = 2013.$$

Iš čia gauname, kad x yra trupmeninis skaičius $\left(x = 1623\frac{1}{3}\right).$ Vadinasi, atvejis, kad supirktuvėje nėra 0,5 *l* talpos stiklainių yra atmestinas.

Pastaba. Uždavinio sąlyga yra tikrai korektiška, nes 2013 litrų bendra talpa susidaro, pavyzdžiui, iš 2, 1620 ir 878 atitinkamai 0,5 *l*, 0,7 *l* ir 1 *l* talpos stiklainių.

7. Jei statinėje trūktų (iki pilnos) 30 % vandens, tai joje būtų 30 litrų daugiau vandens, negu tada, kai į ją būtų įpilta 30 % vandens. Kokia statinės talpa?

Sprendimas. Tegu statinės talpa yra *x* litrų. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė

$$0{,}7x - 0{,}3x = 30.$$

Iš jos gauname $x = 75.$

Ats.: 75 litrai.

8. Šachmatų meistras žaidė simultaną 4 valandas. Po 2 valandų žaidimo jis 20 % simultano partijų laimėjo ir keturias partijas pralaimėjo. Per kitas 2 valandas jis laimėjo 60 % likusių partijų, tris partijas pralaimėjo ir penkias baigė lygiosiomis. Su keliais šachmatininkais žaidė meistras?

Sprendimas. Sakykime, kad meistras žaidė su n šachmatininkų. Pagal sąlygą per pirmąsias 2 valandas jis sužaidė $0{,}2n+4$ partijas, o per kitas dvi valandas sužaidė

$$0{,}6(n-(0{,}2n+4))+3+5 = 0{,}48n+5{,}6 \text{ partijų.}$$

Vadinasi,

$$n = (0{,}2n+4)+(0{,}48n+5{,}6) = 0{,}68n+9{,}6.$$

Iš čia gauname:

$$0{,}32n = 9{,}6 \Rightarrow n = 30.$$

Ats.: 30.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+xy+x=10, \\ y^2+xy+y=20. \end{cases}$$

Sprendimas.

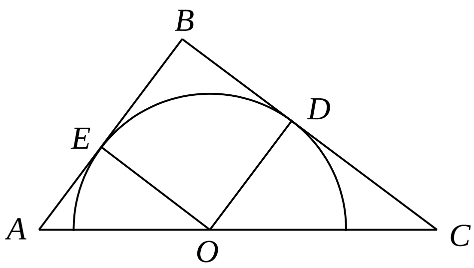
$$\begin{cases} x^2+xy+x=10, \\ y^2+xy+y=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+y+1)=10, \\ y(x+y+1)=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+y+1)=10, \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+x-10=0, \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm 11}{6}, \\ y=2x. \end{cases}$$

Gauname du sprendinius: $x_1=-2,\ y_1=-4$ ir $x_2=\frac{5}{3},\ y_2=\frac{10}{3}$.

Ats.: (–2; –4) ir $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

10. Į statųjį trikampį *ABC* įbrėžtas pusapskritimis, kurio centras *O* yra įžambinėje *AC*, o spindulys lygus 3. Pusapskritimis liečia trikampio statinius. Apskaičiuokite trikampio *ABC* plotą, jei $OC=5$.



Sprendimas. Nubrėžkime $OE \perp AB$ ir $OD \perp BC$. Tada

$EB=BD=3,$

$DC=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{25-9}=4,$

$BC=3+4=7.$

Pažymėkime $x=AE$. Tada $AB=x+3$. Iš stačiųjų trikampių *ABC* ir *ODC* panašumo gauname lygybę

$$\frac{x+3}{3}=\frac{7}{4}.$$

Iš čia $x=2{,}25$ ir $AB=5{,}25$.

Vadinasi,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5{,}25\cdot 7=18{,}375.$$

Ats.: 18,375.

ŠIRVINTŲ KRAŠTO
KOMANDINIS MATEMATIKOS KONKURSAS
MOKYTOJO ANTANO KULIEŠIAUS
TAUREI LAIMĖTI

Širvintų Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija,
2013 m. spalio 18 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Po rekonstrukcijos dalis staklių iš cecho buvo pašalinta. Pašalintų staklių procentų skaičius lygus likusių staklių skaičiui. Koks mažiausias staklių skaičius galėjo būti ceche iki rekonstrukcijos.

Sprendimas. Tegu x yra pradinis staklių skaičius, o y – likusių po rekonstrukcijos staklių skaičius. Pagal uždavinio sąlygą

$$\frac{x-y}{x}\cdot 100 = y.$$

Iš čia

$$x=\frac{100y}{100-y}.$$

Kadangi

$$\frac{100y}{100-y}=\frac{(100y-10\,000)+10\,000}{100-y}=\frac{10\,000}{100-y}-100,$$

tai

$$x=\frac{10\,000}{100-y}-100.$$

Didžiausia vardiklio $100-y$ reikšmė, kuriai esant $\frac{10\,000}{100-y}$ yra teigiamas sveikasis skaičius yra 80. Todėl mažiausia x reikšmė yra

$$\frac{10\,000}{80}-100=125-100=25.$$

Ats.: 25.

2. Per grybavimo varžybas Rūta rado baravykų, raudonikių ir rudmėsių; iš viso 41 grybą. Jos pintinėje tarp bet kurių 33 grybų yra ne mažiau kaip 3 raudonikiai. Tarp bet kurių 30 grybų rastume bent 2 baravykus, o tarp bet kurių 25 grybų – bent vieną rudmėsę. Kiek baravykų ir kiek raudonikių rado Rūta?

Sprendimas. Tegu x yra baravykų, y – raudonikių, o z yra rudmėsių skaičius. Pagal sąlygą $x+y+z=41.$ Be to, turi galioti tokios nelygybės:

$$x+z\le 30,\quad y+z\le 28 \ \text{ ir } \ x+y\le 24.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname nelygybę $x+y+z\le 41.$ Vadinasi, turi galioti visos trys lygybės:

$$x+z=30,\quad y+z=28 \ \text{ ir } \ x+y=24.$$

Išsprendę lygčių sistemą gauname vienintelį sprendinį: $x=13,\ y=11,\ z=17.$

Ats.: 13 baravykų ir 11 raudonikių.

3. Natūraliojo skaičiaus ir jam atvirkščio skaičiaus (skaičiaus, užrašyto atvirkščia skaitmenų tvarka) sandauga lygi 692 443. Raskite tą skaičių.

Sprendimas. Aišku, kad ieškomasis skaičius turi būti triženklis. Tegu jis yra $\overline{xyz}$ ir $x \le z.$ Sandaugos $\overline{xyz} \cdot \overline{zyx}$ paskutinis skaitmuo yra 3; jis yra sandaugos $x \cdot z$ paskutinis skaitmuo. Galimi atvejai:

1) $x = 1,\ \ z = 3;$ 2) $x = 7,\ \ z = 9.$

Pirmas atvejis negalimas, nes

$$193 \cdot 391 < 200 \cdot 400 = 80\,000 < 692\,443.$$

Antruoju atveju įsitikiname, kad būtinai $y = 3.$ Taigi ieškomasis skaičius yra 739 arba 937.

Ats.: 739 arba 937.

4. Dviejų realiųjų skaičių suma lygi 2. Įrodykite, kad tų skaičių kubų suma nemažesnė už 2.

Sprendimas. Tegu x yra bet kuris realusis skaičius. Tada skaičių $a = 1 + x$ ir $b = 1 - x$ suma lygi 2. Skaičiuodami kubų sumą, gausime:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 2((a+b)^2 - 3ab) = 2(4 - 3ab) = 2(4 - 3(1+x)(1-x) =$$
$$= 2(4 - 3(1 - x^2)) = 2(1 + 3x^2) \ge 2.$$

5. Natūralieji skaičiai, pradedant 1, rašomi į vieną eilę. Koks skaitmuo bus 2013-oje pozicijoje?

Sprendimas. Vienaženklių skaičių yra 9, o dviženklių 90. Surašius juos, susidaro 189 skaitmenys. Kiti $2013 - 189 = 1824$ skaitmenys gaunami iš eilės rašant triženklius skaičius. Jų skaičių gauname 1824 dalydami iš 3. Kadangi $1824 : 3 = 608,$ tai paskutinis triženklis skaičius yra 707. Vadinasi, 2013-oje pozicijoje bus skaitmuo 7.

Ats.: 7.

6. Įrodykite, kad skaičius $9999 \cdot 3^{2013} - 111 \cdot 7^{2013}$ dalijasi iš 5.

Įrodymas. Skaičiaus

$$9999 \cdot 3^{2013} = 1111 \cdot 3^{2015} = 1111 \cdot 3^{4 \cdot 503 + 3} = 1111 \cdot (81)^{503} \cdot 27$$

paskutinis skaitmuo yra 7. Skaičiaus

$$111 \cdot 7^{2013} = 111 \cdot 7^{4 \cdot 503 + 1} = 111 \cdot (7^4)^{503} \cdot 7 = 111(2401)^{503} \cdot 7$$

paskutinis skaitmuo yra 7. Vadinasi, skaičiaus a paskutinis skaitmuo yra 0. Todėl a dalijasi iš 5.

7. Įrodykite, kad

$$\frac{x+y}{1+x+y} < \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y},$$

jei $x > 0$ ir $y > 0.$

Įrodymas. Aišku, kad

$$\frac{x}{1+x+y} < \frac{x}{1+x}, \text{ jei } y > 0, \text{ ir } \frac{y}{1+x+y} < \frac{y}{1+y}, \text{ jei } x > 0.$$

Sudėję ir gauname nelygybę

$$\frac{x+y}{1+x+y} < \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y},$$

galiojančią, jei $x > 0$ ir $y > 0.$

8. Kvadratinio trinario x^2+ax+b koeficientai a ir b yra sveikieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $a\cdot b=2^{2013}$. Kiek yra tokių koeficientų porų (a; b), kurioms esant kvadratinio trinario šaknys yra realieji skaičiai?

Sprendimas. Lengva įsitikinti, kad a ir b turi būti skaičiaus 2 laipsniai. Tegu $a=2^k$, $k=0,1,2,\ldots$. Tada $b=2^{2013-k}$ ir $k\le 2013$.

Kvadratinio trinario diskriminantas

$$D=a^2-4b=2^{2k}-4\cdot 2^{2013-k}=2^{2k}-2^{2015-k}.$$

Sąlyga $D\ge 0$ galioja tik tada, kai $2^{2k}\ge 2^{2015-k}$. Iš čia gauname nelygybę $2k\ge 2015-k$, o iš jos – nelygybę $k\ge 672$. Kadangi $k\le 2013$, tai $672\le k\le 2013$. Galimų k reikšmių skaičius yra $2013-672=1341$.

Ats.: 1341.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} xy=1+x+y,\\ yz=5+y+z,\\ zx=2+z+x.\end{cases}$$

Sprendimas.

$$\begin{cases} xy=1+x+y,\\ yz=5+y+z,\\ zx=2+z+x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(xy-y)+(1-x)=2,\\ (yz-z)+(1-y)=6,\\ (zx-x)+(1-z)=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-1)(y-1)=2,\\ (y-1)(z-1)=6,\\ (z-1)(x-1)=3.\end{cases} \qquad (1)$$

Sudauginę gauname lygtį

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2=36,$$

o iš jos – dvi lygtis:

$$(x-1)(y-1)(z-1)=-6 \text{ ir } (x-1)(y-1)(z-1)=6.$$

Remdamiesi (1), iš pirmos lygties gauname:

$$\begin{cases} z-1=-3,\\ x-1=-1,\\ y-1=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0,\\ y=-1,\\ z=-2,\end{cases}$$

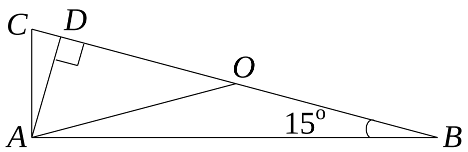
o iš antros lygties gauname:

$$\begin{cases} z-1=3,\\ x-1=1,\\ y-1=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2,\\ y=3,\\ z=4.\end{cases}$$

Ats.: (–0; –1; –2), (2; 3; 4).

10. Stačiojo trikampio aukštinės, nuleistos į įžambinę, ilgis lygu 1. Apskaičiuokite trikampio plotą, jei vienas šio trikampio kampas lygus 15°.

Sprendimas. Įžambinės BC vidurio taškas O yra apie statųjį trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Vadinasi,



$$AO=OB,\ \angle AOB=180^\circ-30^\circ=150^\circ,$$

$$\angle AOC=180^\circ-150^\circ=30^\circ.$$

Tada iš stačiojo trikampio ADO apskaičiuojame, kad $AO=2AD=2$. Kadangi $BC=2AO=4$, tai

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2.$$

Ats.: 2.