# Rietavo XV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

**Rietavas**

**2016 11 11**

**9–10 klasės**

---

**1 uždavinys.** Mykolas sugalvoja skaičių, tada padalija jį iš dvejetu didesnio skaičiaus ir rezultatą atima iš vieneto. Šį skirtumą padalija iš skaičiaus, vienetu mažesnio už pradinį sugalvotą skaičių, ir gauna $\frac{1}{27}$. Kokį skaičių galėjo sugalvoti Mykolas?

**2 uždavinys.** Du žmonės stovi toje pačioje vietoje prie geležinkelio. Kai juos pasiekia pravažiuojančio traukinio priekis, jie pradeda eiti priešingomis kryptimis lygiagrečiai geležinkeliui. Kai kiekvieną iš jų pasiekia traukinio galas, jie sustoja nuėję atitinkamai 30 m ir 40 m. Koks yra traukinio, važiuojančio pastoviu greičiu, ilgis, jei abu žmonės ėjo vienodu pastoviu greičiu?

**3 uždavinys.** Funkcija $f$ tenkina lygtį $f(x)+1=\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$ su visais realiaisiais skaičiais $x$. Jei $f(-1)=f(1)=5$, kokia yra $f(3)$ reikšmė?

**4 uždavinys.** Trikampio $ABC$ kampas $B$ yra statusis. Taškai $M$ ir $N$ yra atitinkamai kraštinių $AB$ ir $BC$ vidurio taškai. Jei $AN=24$, o $MC=17$, koks yra $AC$ ilgis?

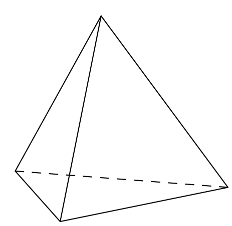
**5 uždavinys.** Raskite stačiakampio, kurio įstrižainė lygi 24 cm, o kampas tarp įstrižainių lygus $60^\circ$, plotą.

**6 uždavinys.** Trikampyje $ABC$ nubrėžta pusiaukraštinė $AD$. Raskite kampo $\angle ABC$ didumą, jei žinome, kad $\angle BAC$ yra statusis, o $\angle CDA=30^\circ$.

**7 uždavinys.** Rusnė žaidžia su skaičiuotuvu. Ji skaičiuoja, iš kelių pagaliukų sudaryti jos parašyti skaičiai. Pavyzdžiui, paveikslėlyje parašytas skaičius turi lygiai 49 pagaliukus. Vėliau ji parašo didžiausią skaičių, kurį galima sudaryti iš 13 pagaliukų. Koks tai skaičius?


**8 uždavinys.** Ar yra toks stačiakampis, kurį galima sukarpyti į devynis kvadratus su kraštinių ilgiais $2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33$ ir 36?

**9 uždavinys.** Kiekvieną taisyklingos trikampės piramidės (žr. pav.) sieną galima nudažyti raudonai arba mėlynai. Kiek yra skirtingų būdų nudažyti piramidę? (Du būdai laikomi vienodais, jei vienu būdu nudažyta piramidė gali būti pasukta taip, kad jos kiekvienos sienos spalva sutaptų su kitu būdu nudažytos piramidės atitinkamos sienos spalva.)



**10 uždavinys.** Jonas Rietaviškis ir Kostas Gargždiškis žaidžia tokį žaidimą. Krūvelėje guli 32 akmenukai. Abu žaidėjai iš krūvelės pakaitomis ima arba vieną akmenuką, arba pirminį skaičių akmenukų tol, kol nebelieka nei vieno akmenuko. Laimi tas žaidėjas, kuris paima paskutinį akmenuką. Kostas Gargždiškis pradeda žaidimą. Įrodykite, kad Jonas Rietaviškis visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų Kostas Gargždiškis.

# Rietavo XV komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

**Rietavas**

**2016 11 11**

**11–12 klasės**

---

**1 uždavinys.** Raskite lygties

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$$

realiųjų sprendinių sandaugą.

**2 uždavinys.** Du žmonės stovi toje pačioje vietoje prie geležinkelio. Kai juos pasiekia pravažiuojančio traukinio priekis, jie pradeda eiti priešingomis kryptimis lygiagrečiai geležinkeliui. Kai kiekvieną iš jų pasiekia traukinio galas, jie sustoja nuėję atitinkamai 30 m ir 40 m. Koks yra traukinio, važiuojančio pastoviu greičiu, ilgis, jei abu žmonės ėjo vienodu pastoviu greičiu?

**3 uždavinys.** Funkcija $f$ tenkina lygtį $f(x) + 1 = \frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}$ su visais realiaisiais skaičiais $x$. Jei $f(-1) = f(1) = 5$, kokia yra $f(3)$ reikšmė?

**4 uždavinys.** Du realieji skaičiai $x$ ir $y$ tenkina lygybę: $(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1$. Raskite visas galimas $x + y$ reikšmes.

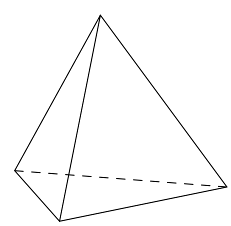
**5 uždavinys.** Tegu $ABC$ – įvairiakraštis trikampis (trikampis, kurio visos kraštinės yra skirtingo ilgio), o $AC$ – ilgiausia jo kraštinė. Kraštinėje $AC$ pažymėti tokie taškai $P$ ir $Q$, kad $AP = AB$ ir $CQ = CB$. Apskritimo, apibrėžto apie trikampį $BPQ$, centrą pažymėkime $O_1$, o apskritimo, įbrėžto į trikampį $ABC$, centrą pažymėkime $O_2$. Įrodykite, kad šių apskritimų centrai $O_1$ ir $O_2$ sutampa.

**6 uždavinys.** Stačiojo trikampio $ABC$ įžambinės $AB$ vidurio taškas pažymėtas raide $M$. Ant statinio $BC$ (arba jo tęsinio) pažymėtas taškas $D$, toks, kad $AC = MD$. Raskite kampo $\angle CDM$ didumą.

**7 uždavinys.** Sofija ant trijų kortelių užrašė 6 skirtingus skaičius (po vieną ant kiekvienos kortelės pusės) taip, kad ant kiekvienos kortelės parašytų skaičių suma būtų ta pati. Tada ji padėjo korteles ant stalo su atverstais skaičiais 44, 59 ir 38. Visi trys skaičiai, kurių nesimato, yra pirminiai skaičiai. Kokie tai skaičiai?

**8 uždavinys.** Ar yra toks stačiakampis, kurį galima sukarpyti į devynis kvadratus su kraštinių ilgiais $2, 5, 7, 9, 16,\ 25, 28, 33$ ir $36$?

**9 uždavinys.** Kiekvieną taisyklingos trikampės piramidės (žr. pav.) sieną galima nudažyti raudonai, baltai arba mėlynai. Kiek yra skirtingų būdų nudažyti piramidę? (Du būdai laikomi vienodais, jei vienu būdu nudažyta piramidė gali būti pasukta taip, kad jos kiekvienos sienos spalva sutaptų su kitu būdu nudažytos piramidės atitinkamos sienos spalva.)



**10 uždavinys.** Jonas Rietaviškis ir Kostas Gargždiškis žaidžia tokį žaidimą. Krūvelėje guli 32 akmenukai. Abu žaidėjai iš krūvelės pakaitomis ima arba vieną akmenuką, arba pirminį skaičių akmenukų tol, kol nebelieka nei vieno akmenuko. Laimi tas žaidėjas, kuris paima paskutinį akmenuką. Kostas Gargždiškis pradeda žaidimą. Įrodykite, kad Jonas Rietaviškis visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų Kostas Gargždiškis.