RIETAVO DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2013 m. gruodžio 6 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Raskite x, jeigu $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{x}$.

   Sprendimas. Pertvarkę kairiąją lygties pusę, gauname: $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{375}$. Todėl $x=375$. $\square$

2. Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta su visais realiaisiais x ir tenkina lygtį $f(2x)=2f(x)+1$. Apskaičiuokite $f(1)$, jei $f(8)=16$.

   Sprendimas. Į lygtį vietoje x įrašę 4 gauname $f(8)=2f(4)+1$. Kadangi $f(8)=16$, tai $f(4)=\frac{15}{2}$. Dabar vietoj x įrašę 2 gauname $f(4)=2f(2)+1$, todėl $f(2)=\frac{13}{4}$. Galiausiai vietoj x įrašę 1 randame, kad $f(1)=\frac{9}{8}$. $\square$

3. Įrodykite, kad:

   (a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$;

   (b) $\sqrt{76-42\sqrt{3}}+\sqrt{31+12\sqrt{3}}$ yra sveikasis skaičius.

   Sprendimas. (a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2\cdot1\cdot\sqrt{2}+2}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}$.

   (b) Panašiai, kaip ir (a) dalyje: $\sqrt{76-42\sqrt{3}}=\sqrt{49-2\cdot7\cdot3\sqrt{3}+27}=7-3\sqrt{3}$, $\sqrt{31+12\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\cdot2\cdot3\sqrt{3}+27}=2+3\sqrt{3}$. Pastarųjų dviejų reiškinių suma lygi 9.

   $\square$

4. Jonas Rietaviškis kasmet švenčia Jonines. Atšventęs šiemetines Jonines, Jonas pastebėjo, kad ši diena buvo pirmadienis, kaip ir prieš 28-erius metus, kai jis pirmą kartą minėjo savo vardo dieną. Jonas Rietaviškis neturi kalendoriaus, tačiau žino, kad metuose yra 365 dienos, o kas ketverius metus išpuolantys keliamieji metai yra viena diena ilgesni. Kiek kartų per šį laikotarpį jis šventė Jonines pirmadienį?

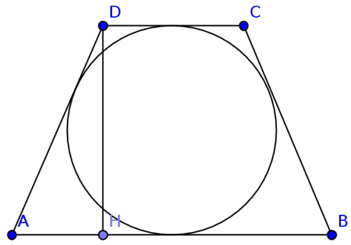
   Sprendimas. Jonas Rietaviškis Jonines šventė 5 kartus. Visą ciklą sudaro 28-eri metai. Per tą laiką ta pati savaitės diena konkrečią metų dieną pasitaikys keturis kartus (metuose, kuriuos dalijant iš 4 gaunamos skirtingos liekanos). 29-ieji metai pradeda naują ciklą (šiuo atveju, penktas kartas). $\square$

5. Raskite rombo ir į jį įbrėžto skritulio plotų santykį, jei viena rombo įstrižainė yra dvigubai ilgesnė už kitą.

   Sprendimas. Pažymėkime rombo $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką raide E. Iš sąlygos žinome, kad $2|AE|=|BE|$. Tarkime, kad įbrėžtas apskritimas liečia rombą taške F. Statieji trikampiai AEF ir EFB yra panašūs, todėl $\frac{|EF|}{|AF|}=\frac{|BE|}{|AE|}=2$. Pagal Pitagoro teoremą $|AF|^2+|EF|^2=|AE|^2$. Kadangi $|EF|=2|AF|$, tai $|AE|^2=5|AF|^2$. Rombo plotas yra lygus $2|AE||EB|=4|AE|^2=20|AF|^2$. Įbrėžto apskritimo spindulys lygus $|EF|=2|AF|$, o plotas $4\pi|AF|^2$. Taigi plotų santykis lygus $\frac{20|AF|^2}{4\pi|AF|^2}=\frac{5}{\pi}$. $\square$

6. Lygiašonės trapecijos pagrindo ilgis yra 3, o du kampai prie jo - po $60°$. Be to, į ją galima įbrėžti apskritimą. Raskite tos trapecijos aukštinę.

Sprendimas. Pažymėkime AH ilgį raide x. Tada $|DC| = 3 - 2x$. Kadangi $\angle ADH = 30°$, tai $|AD| = 2x$. Į trapeciją yra įbrėžtas apskritimas, todėl jos priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios. Iš lygties $6 - 2x = 4x$ gauname, kad $x = 1$. Todėl $|DH| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. $\square$



7. Ant stalo yra dvi krūvelės akmenukų – vienoje yra 13, kitoje – 2013. Kęstutis ir Akvilė žaidžia tokį žaidimą. Jie paeiliui iš bet kurios krūvelės (iš vienos) ima bet kurį akmenukų skaičių ir taip žaidžia kol ant stalo nebelieka nė vieno. Laimi tas, kas paima paskutinį akmenuką. Pirmoji pradeda Akvilė. Ar gali Akvilė laimėti prieš Kęstutį kad ir kaip jis žaistų? Jeigu taip, nurodykite, kaip Akvilė turi žaisti.

   Sprendimas. Gali. Akvilė iš didesnės krūvelės paima 2000 akmenukų. Tada abiejose krūvelėse lieka po lygiai. Jei Kęstutis paima x akmenukų, tai Akvilė iš kitos krūvelės paima irgi x akmenukų, kad vėl abiejose liktų po lygiai. Kai Kęstutis paims paskutinį vienos krūvelės akmenuką, Akvilė paims paskutinį kitos krūvelės akmenuką ir laimės žaidimą. $\square$

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais $n^4 + n^2 + 1$ yra pirminis.

   Sprendimas. Išskaidykime: $n^4+n^2+1 = n^4+2n^2+1-n^2 = (n^2+1)^2-n^2 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Kai $n > 1$, abu dauginamieji yra didesni už vienetą, todėl $n^4 + n^2 + 1$ nėra pirminis. Kai $n = 1$, $1^4 + 1^2 + 1 = 3$. Taigi $n^4 + n^2 + 1$ yra pirminis tik tuomet kai $n = 1$. $\square$

9. Įrodykite, kad tarp 10 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas tarpusavyje pirminis su likusiųjų sandauga.

   Du natūralieji skaičiai vadinami *tarpusavyje pirminiais*, jei jų didžiausias bendras daliklis lygus vienam.

   Sprendimas. Tarp 10 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra 5 lyginiai ir 5 nelyginiai. Tarp nelyginių skaičių yra daugiausiai 2, kurie dalijasi iš 3, daugiausiai 1, kuris dalijasi iš 5, ir daugiausiai 1, kuris dalijasi ši 7. Taigi dar lieka bent vienas nelyginis skaičius a, kurio visi pirminiai dalikliai yra ne mažesni už 11 arba jis lygus 1. Nagrinėkime pirmą atvejį. Tarkime, a turi bendrą pirminį daliklį p su likusiųjų sandauga. Tada kažkuris iš likusių skaičių taip pat dalijasi iš p, bet taip būti negali, nes $p \geq 11$. Antruoju atveju nesunku pastebėti, kad skaičius 7 bus tarpusavyje pirminis su likusiųjų sandauga. $\square$

10. Ant kiekvieno 16×30 matmenų lentos langelio tupi po musę. Jei du langeliai turi bendrą kraštinę, tai juose tupinčios musės vadinamos kaimynėmis. Pabaidytos musės visos nuskrenda ir sutupia po vieną kiekviename kitos lentos, kurios matmenys yra 15×32, langelyje. Ar gali jos sutūpti taip, kad kaimynės pirmoje lentoje būtų kaimynėmis ir kitoje lentoje?

    Sprendimas. Negali. Pirmojoje lentoje $14 \cdot 28 = 392$ musės turi po keturias kaimynes, o antrojoje lentoje $13 \cdot 30 = 390$ musių turi po keturias kaimynes. Todėl jos sutūpti taip, kad kaimynės vienoje lentoje būtų ir kaimynės kitoje lentoje, negali. $\square$

RIETAVO DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2013 m. gruodžio 6 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Įrodykite, kad $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}} + \sqrt{31 + 12\sqrt{3}}$ yra sveikasis skaičius.

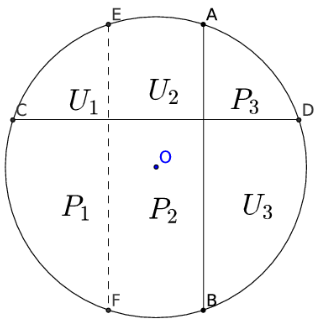
   Sprendimas. Pertvarkykime abu dėmenis: $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}} = \sqrt{49 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{3} + 27} = 7 - 3\sqrt{3}$, $\sqrt{31 + 12\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} + 27} = 2 + 3\sqrt{3}$. Pastarųjų dviejų reiškinių suma lygi 9. □

2. Jonas Rietaviškis kasmet švenčia Jonines. Atšventęs šiemetines Jonines, Jonas pastebėjo, kad ši diena buvo pirmadienis, kaip ir prieš 28-erius metus, kai jis pirmą kartą minėjo savo vardo dieną. Jonas Rietaviškis neturi kalendoriaus, tačiau žino, kad metuose yra 365 dienos, o kas ketverius metus išpuolantys keliamieji metai yra viena diena ilgesni. Kiek kartų per šį laikotarpį jis šventė Jonines pirmadienį?

   Sprendimas. Jonas Rietaviškis Jonines šventė 5 kartus. Visą ciklą sudaro 28-eri metai. Per tą laiką ta pati savaitės diena konkrečią metų dieną pasitaikys keturis kartus (metuose, kuriuos dalijant iš 4 gaunamos skirtingos liekanos). 29-ieji metai pradeda naują ciklą (šiuo atveju, penktas kartas). □

3. Skritulio formos pica dviem statmenais pjūviais buvo supjaustyta į keturias dalis. Paulius paėmė didžiausiąją ir mažiausiąją iš jų, o Ugnei atiteko dvi likusios dalys. Ar galėjo Ugnei atitekti daugiau picos negu Pauliui?

   Sprendimas. Tarkime, kad pica buvo padalinta pjūviais AB ir CD.



   Nubrėžkime stygai AB simetrišką skritulio centro atžvilgiu stygą EF. Paulius paėmė P_1, P_2 ir P_3 dalis, o Ugnei atiteko U_1, U_2 ir U_3 dalys. Kadangi U_1 dalies plotas lygus P_3, P_1 lygus U_3, o $U_2 \leq P_2$, tai Ugnei negalėjo atitekti daugiau picos, negu Pauliui. □

4. Raskite rombo ir į jį įbrėžto skritulio plotų santykį, jei viena rombo įstrižainė yra dvigubai ilgesnė už kitą.

   Sprendimas. Pažymėkime rombo $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką raide E. Iš sąlygos žinome, kad $2|AE| = |BE|$. Tarkime, kad įbrėžtas apskritimas liečia rombą taške F. Statieji trikampiai AEF ir EFB yra panašūs, todėl $\frac{|EF|}{|AF|} = \frac{|BE|}{|AE|} = 2$. Pagal Pitagoro teoremą $|AF|^2 + |EF|^2 = |AE|^2$. Kadangi $|EF| = 2|AF|$, tai $|AE|^2 = 5|AF|^2$. Rombo plotas yra lygus $2|AE||EB| = 4|AE|^2 = 20|AF|^2$. Įbrėžto apskritimo spindulys lygus $|EF| = 2|AF|$, o plotas $4\pi|AF|^2$. Taigi plotų santykis lygus $\frac{20|AF|^2}{4\pi|AF|^2} = \frac{5}{\pi}$. □

5. Taškas M yra trikampio ABC kraštinėje AB, o taškas N – kraštinėje BC. Be to, $|AM| = 2|MB|$, $|BN| = 2|NC|$ ir $\angle ACB = 2\angle MNB$. Įrodykite, kad trikampis ABC yra lygiašonis.

Sprendimas. Atkarpos AM vidurio tašką pažymėkime raide E, o atkarpos BN vidurio tašką - raide F. Trikampis EBN yra panašus į trikampį ABC, todėl $\angle BNE = \angle BCA$. Kadangi $\angle BNM = \frac{1}{2}\angle BCA$, tai $\angle BNM = \angle MNE$. Atkarpa MF yra lygiagreti atkarpai EN, todėl $\angle MNE = \angle NMF$ ir trikampis MFN yra lygiašonis. Kadangi $|BF| = |FN| = |MF|$, tai ir trikampis BFM yra lygiašonis. Pastarasis trikampis yra panašus į $\triangle ABC$, todėl jis irgi yra lygiašonis. $\square$

6. Racionalieji skaičiai $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{19}$ sudaro tokią aritmetinę progresiją, kad

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 448.$$

(a) Raskite sumą $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19}$.

(b) Ar gali vienuoliktasis šios progresijos narys a_{11} būti lygus $\frac{2013}{20}$?

(c) Ar gali septintasis šios progresijos narys a_7 būti lygus $\frac{2013}{19}$?

Sprendimas. (a) Pažymėkime duotos aritmetinės progresijos $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ skirtumą raide d. Tada $a_4 = a_1 + 3d$, $a_8 = a_1 + 7d$, $a_{12} = a_1 + 11d$, $a_{16} = a_1 + 15d$. Pasinaudoję sąlygoje duota lygybe, gauname: $a_1 + 9d = 112$. Pagal aritmetinės progresijos formulę $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} = \frac{19(a_1+a_{19})}{2} = 19(a_1 + 9d) = 19 \cdot 112 = 2128$.

(b) Iš (a) dalies žinome, kad $a_{10} = a_1 + 9d = 112$. Progresija yra didėjanti, todėl $112 < a_{11}$. Kadangi $\frac{2013}{20} < 112$, tai a_{11} negali būti lygus $\frac{2013}{20}$.

(c) Jei $a_7 = a_1 + 6d = \frac{2013}{19}$, o $a_1 + 9d = 112$ (pagal dalį (a)), tai $d = \frac{115}{57} > 0$, o $a_1 = \frac{1783}{19}$. Ši progresija tenkina uždavinio sąlygas, todėl a_7 gali būti lygus $\frac{2013}{19}$.

$\square$

7. Įrodykite, kad tarp 10 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas tarpusavyje pirminis su likusiųjų sandauga.

Du natūralieji skaičiai vadinami *tarpusavyje pirminiais*, jei jų didžiausias bendras daliklis lygus vienam.

Sprendimas. Tarp 10 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra 5 lyginiai ir 5 nelyginiai. Tarp nelyginių skaičių yra daugiausiai 2, kurie dalijasi iš 3, daugiausiai 1, kuris dalijasi iš 5, ir daugiausiai 1, kuris dalijasi ši 7. Taigi dar lieka bent vienas nelyginis skaičius a, kurio visi pirminiai dalikliai yra ne mažesni už 11 arba jis lygus 1. Nagrinėkime pirmą atvejį. Tarkime, a turi bendrą pirminį daliklį p su likusiųjų sandauga. Tada kažkuris iš likusių skaičių taip pat dalijasi iš p, bet taip būti negali, nes $p \geq 11$. Antruoju atveju nesunku pastebėti, kad skaičius 7 bus tarpusavyje pirminis su likusiųjų sandauga. $\square$

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais $n^4 + n^2 + 1$ yra pirminis.

Sprendimas. Išskaidykime: $n^4+n^2+1 = n^4+2n^2+1-n^2 = (n^2+1)^2-n^2 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Kai $n > 1$, abu dauginamieji yra didesni už vienetą, todėl $n^4 + n^2 + 1$ nėra pirminis. Kai $n = 1$, $1^4 + 1^2 + 1 = 3$. Taigi $n^4 + n^2 + 1$ yra pirminis tik tuomet kai $n = 1$. $\square$

9. (a) Raskite bent vieną lygties $x^{2013} + y^{2013} = z^{2014}$ sveikąjį sprendinį (x, y, z).

(b) Įrodykite, kad ši lygtis turi be galo daug sveikųjų sprendinių.

Sprendimas. (a) Atkreipkime dėmesį, kad $2^{2013} + 2^{2013} = 2 \cdot 2^{2013} = 2^{2014}$. Todėl $x = y = z = 2$ tenkina lygtį.

(b) Su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi k $x = y = 2k^{2014}$, $z = 2k^{2013}$ tenkina lygtį.

$\square$

10. Raskite sumą

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \cdots + \frac{2013}{2011!+2012!+2013!}.$$

Sprendimas. Nagrinėkime n-tąjį sumos narį:

$$\begin{aligned}\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!} &= \frac{n}{(n-2)!(1+(n-1)+(n-1)n)} = \frac{1}{(n-2)!n} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Taigi duotą sumą galima perrašyti taip:

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{2011!} - \frac{1}{2012!} + \frac{1}{2012!} - \frac{1}{2013!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2013!}.$$

$\square$