RIETAVO DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2010 m. gruodžio 3 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais *n* skaičius $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ yra natūralusis.

Sprendimas. $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}=\frac{2n+3n^2+n^3}{6}=\frac{n(n^2+3n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Tarp dviejų iš eilės einančių sveikųjų skaičių vienas yra lyginis (dalijasi iš 2), tarp trijų iš eilės einančių sveikųjų skaičių vienas iš jų dalijasi iš 3. Todėl sandauga $n(n+1)(n+2)$ su visais natūraliaisiais (netgi sveikaisiais) *n* dalijasi ir iš 2, ir iš 3, taigi ir iš 6.

2. Raskite skaičiaus $12345678910111213...$, sudaryto iš 1000 skaitmenų, paskutinįjį skaitmenį.

Sprendimas. Nagrinėdami duotąjį 1000 skaitmenų skaičių, pastebime, kad jis yra toks: $\underbrace{123...9}_{9\text{ sk.}}\underbrace{101112..99}_{180\,sk.}\underbrace{10010102..368369}_{811\text{ sk.}}3$. Matome, kad šio skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 3.

3. Žinoma, kad $xyz>0$. Įrodykite, kad $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\geq x+y+z$.

Sprendimas. $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\geq x+y+z \,|: xyz \Leftrightarrow \frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{zx}-\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}\geq 0\,|\cdot 2 \Leftrightarrow$
$\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2\geq 0$.

4. Raskite visus natūraliuosius skaičius *m*, su kuriais lygties $x^2-5mx+84=0$ sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

Sprendimas. Tegu lygties $x^2-5mx+84=0$ sprendiniai yra x_1 ir x_2. Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=5m,\ x_1\cdot x_2=84$. Kai m natūralusis, tai x_1 ir x_2 – natūralieji skaičiai. Be to, $x_1\cdot x_2=1\cdot 2^2\cdot 3\cdot 7$. Šią lygybę tenkina tokie x_1, x_2 reikšmių rinkiniai: $x_1=1, x_2=84$; $x_1=2, x_2=42$; $x_1=3, x_2=28$; $x_1=4, x_2=21$; $x_1=6, x_2=14$; $x_1=7, x_2=12$ ir dar šeši, gauti sukeitus x_1 ir x_2 reikšmes. Tik trys iš jų $x_1=1, x_2=84$, $x_1=4, x_2=21$ ir $x_1=6, x_2=14$ tenkina pirmąją lygybę. Tuomet $m=17, m=5, m=4$ atitinkamai. *Ats.*: 17, 5, 4.

5. Raskite natūralųjį skaičių *n*, kurio kvadratas lygus $2008\cdot 2009\cdot 2010\cdot 2011+1$.

Sprendimas. Pažymėkime $2008=m$. Tuomet
$m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)+1=(m^2+3m)\cdot(m^2+3m+2)+1=(m^2+3m)^2+2(m^2+3m)+1=$
$=(m^2+3m+1)^2$. Taigi $n=m^2+3m+1=2008^2+3\cdot 2008+1=4038089.$

6. Raskite visas sveikųjų skaičių *x* ir *y* poras $(x;\,y)$, su kuriomis galioja lygybė
$$2x^2-2y^2-3xy=7.$$

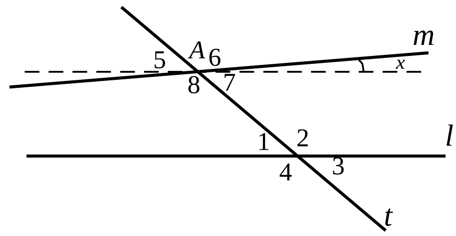
Sprendimas. $2x^2 - 2y^2 - 3xy = 7 \Leftrightarrow (x-2y)(2x+y) = 7$. Vadinasi, $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ arba $\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x + y = -7, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ 2x + y = 1, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x + y = -7. \end{cases}$. Pirmoji sistema turi sprendinį $(3;1)$, antroji – $(-3;-1)$. Trečioji ir ketvirtoji sprendinių su sveikosiomis komponentėmis neturi.

Ats.: $(3;1)$, $(-3;-1)$.

7. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ir $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

Sprendimas. Pažymėkime šio trikampio kraštines *a*, *b* ir *c*, o aukštines, nuleistas į šias kraštines atitinkamai $h_a = \sqrt{2}$, $h_b = \sqrt{3}$, $h_c = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Tegu to trikampio plotas lygus *S*. Tuomet $a = \frac{2S}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{2S}{\sqrt{3}}, c = \frac{2S}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Kadangi trikampio kraštinių ilgiai tenkina nelygybę $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (kaip ir kitas dvi), tai toks trikampis egzistuoja.

8. Brėžinyje pavaizduotos trys tiesės – *l*, *m* ir *t* (tiesės *m* ir *l* nėra lygiagrečios!). Susikirsdamos jos sudaro kampus, pažymėtus skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8. Kampas, pažymėtas skaičiumi 7, yra 90^0 mažesnis negu kampas 8 ir 105^0 mažesnis negu kampas 2. Kokiu kampu pagal laikrodžio rodyklę apie tašką *A* reikia pasukti tiesę *m*, kad ji taptų lygiagreti su tiese *l* ?



Sprendimas. Per tašką *A* nubrėžkime tiesę, lygiagrečią tiesei *l* ir tegu *x* yra kampas tarp šios tiesės ir tiesės *m*. Tuomet $\angle 8 - \angle 7 = 90^0$, $\angle 8 + \angle 7 = 180^0$. Iš čia gauname, kad $\angle 8 = 135^0$, $\angle 7 = 45^0$.

Tuomet $\angle 2 = \angle 7 + 105^0 = 45^0 + 105^0 = 150^0, \angle 7 - x + 150^0 = 180^0 \Rightarrow x = 45^0 + 150^0 - 180^0 = 15^0$.

Ats.: 15^0.

9. Ant stebuklingo medžio – 60 vaisių: apelsinai ir mandarinai. Berniukas pradėjo skinti vaisius. Kai tik jis nuskina 5 apelsinus, iš karto užauga vienas mandarinas, o kai jis nuskina 10 mandarinų, užauga vienas apelsinas. Po tam tikro laiko ant medžio liko tik vienas apelsinas ir neliko nė vieno mandarino. Kiek apelsinų ant medžio buvo iš pradžių?

Sprendimas. Nuskynus 5 apelsinus, vaisių ant medžio sumažėja 4, o nuskynus 10 mandarinų – sumažėja 9 vaisiais. Tarkime, kad berniukas *x* kartų skynė apelsinus (po 5) ir *y* kartų – mandarinus (po 10). Tada $4x + 9y = 59 \Rightarrow 4x = 59 - 9y \Rightarrow y \le 6$, be to *y* – nelyginis $\Rightarrow$ $y = 3$, $x = 8$. Taigi berniukas 8 kartus skynė apelsinus, iš kurių 3 užaugo „nauji“. Vadinasi, turėjo būti 37 apelsinai, be to dar vienas liko ant medžio. Išvada – iš pradžių ant medžio buvo 38 apelsinai.

10. Jonas Rietaviškis ir Petras Plungiškis dalyvavo meškeriotojų varžybose – tvenkinyje gaudė žuvis. Petro sugautų žuvų kiekis sudaro 55 procentus abiejų žvejų sugautų žuvų kiekio. Jonas karosų sugavo 25 procentais mažiau, negu Petras, o kitų žuvų Petras sugavo 25 procentais mažiau, negu Jonas. Be to, į Jono kibirą telpa ne daugiau kaip 100 žuvų. Kiek iš viso žuvų sugavo Jonas?

Sprendimas. Tarkime, Petras sugavo *x* karosų, o Jonas – *y* kitų žuvų. Tuomet Jonas sugavo $\frac{3}{4}x$ karosų, o Petras – $\frac{3}{4}y$ kitų žuvų. Iš viso Jonas sugavo $\frac{3}{4}x + y$ žuvų, o Petras – $x + \frac{3}{4}y$ žuvų. Pagal sąlygą sudarome lygtį $\frac{7}{4}(x+y) \cdot 55 = 100 \cdot (x + \frac{3}{4}y)$. Iš jos gauname $3x = 17y$, be to ir *x*, ir *y* turi dalytis iš 4 ($x = 4k,\ y = 4m$). Taigi $3 \cdot 4k = 17 \cdot 4m$ ir mažiausios *k* ir *m* reikšmės, su kuriomis galioja ši lygybė, yra $k = 17$, $m = 3$. Todėl $x = 4 \cdot 17 = 68, y = 4 \cdot 3 = 12$. Vadinasi, Jonas iš viso sugavo $\frac{3}{4} \cdot x + y = \frac{3}{4} \cdot 68 + 12 = 63$ žuvis. *Ats*.: 63.

RIETAVO DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2010 m. gruodžio 3 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Sprendimai

1. Raskite trupmeną su pačiu mažiausiu vardikliu, kuri yra tarp trupmenų $\frac{1}{2011}$ ir $\frac{1}{2010}$.

Sprendimas. Ieškome trupmenos $\frac{p}{q}\ (p \neq 1)$, su kuria galiotų nelygybė $\frac{1}{2011} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2010}$. Tuomet $2010 < \frac{q}{p} < 2011$. Kai $p = 2$, tai $4020 < q < 4022$. Vadinasi, $q = 4021$, $\frac{p}{q} = \frac{2}{4021}$.

2. Tegu x ir y – sveikieji skaičiai, su kuriais skaičius $6x + 11y$ dalijasi iš 31. Įrodykite, kad $x + 7y$ dalijasi iš 31.

Sprendimas. Kadangi $6(x + 7y) = (6x + 11y) + 31y$, tai $x + 7y$ dalijasi iš 31.

3. Apskaičiuokite b^b, jeigu $a^b = 81,\ a^c = 3,\ b^c = 2$.

Sprendimas. $a^b = 81 \Rightarrow b \cdot \log_3 a = 4$, $a^c = 3 \Rightarrow c \cdot \log_3 a = 1$. Iš čia $\frac{b}{c} = 4 \Rightarrow b = 4c$. Tuomet $b^b = b^{4c} = (b^c)^4 = 2^4 = 16$.

4. Trys skaičiai yra tokie, kad kiekvieną iš jų sudėję su kitų dviejų skaičių kvadratų suma gauname $\frac{1}{2}$. Raskite šiuos skaičius.

Sprendimas. Pažymėkime ieškomus skaičius a, b ir c. Pagal sąlygą $a + b^2 + c^2 = b + a^2 + c^2 =$

$$= c + a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}, \\ b + a^2 + c^2 = \frac{1}{2}, \\ c + a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - b)(1 - a - b) = 0, \\ (a - c)(1 - a - c) = 0, \\ (b - c)(1 - b - c) = 0. \end{cases}$$

Jeigu būtų $a \neq b, a \neq c, b \neq c$, tai $a + b = 1, a + c = 1, b + c = 1$, ir iš pirmųjų dviejų lygybių gauname prieštarą $b = c$. Taigi visos trys a, b ir c reikšmės negali būti nelygios tarpusavyje.

Jeigu būtų $a \neq b, b = c$ (arba bet kurie du iš šių skaičių lygūs tarpusavyje, bet nelygūs trečiajam), tuomet $a + b = 1 \Rightarrow b = c = 1 - a$. Įrašę šias išraiškas į pradines sąlygas, gausime, kad a reikšmės turi būti lygties $4a^2 - 6a + 3 = 0$ sprendiniai, tačiau ši lygtis sprendinių neturi.

Darome išvadą – uždavinio sąlygas gali tenkinti tik trys tarpusavyje lygūs skaičiai. Taigi $a=b=c$. Tuomet uždavinio sąlygos tampa lygtimi $a+2a^2=\frac{1}{2}$, kurią pertvarkę gauname: $4a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. *Ats.*: $a=b=c=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

5. Raskite natūralųjį skaičių *n*, su kuriuo galioja lygybė

$$\underbrace{111...1}_{100\text{ sk.}}\underbrace{222...2}_{100\text{ sk.}}=n(n+1)\ .$$

Sprendimas.

$$\underbrace{111...1}_{100\text{ sk.}}\underbrace{222...2}_{100\text{ sk.}}=\underbrace{111...1}_{200\text{ sk.}}+\underbrace{111...1}_{100\text{ sk.}}=10^{199}+10^{198}+...+10+1+10^{99}+10^{98}+...+10+1=$$

$$\frac{10^{200}-1}{9}+\frac{10^{100}-1}{9}=\frac{((10^{100})^2-1)+(10^{100}-1)}{9}=\frac{(10^{100}-1)(10^{100}+2)}{9}=\frac{10^{100}-1}{3}\cdot\left(\frac{10^{100}-1}{3}+1\right).$$

Taigi $n=\frac{10^{100}-1}{3}$.

6. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$.

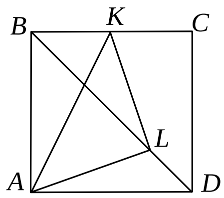
Sprendimas. $x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x+y+z)-3.$ Kadangi $x+y+z=3$ ir $x^2+y^2+z^2=3$, tai $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0 \Rightarrow x=1,\ y=1,\ z=1.$. Taigi, ši lygtis turi vienintelį sprendinį $(1;1;1)$.

7. Ar egzistuoja trikampis, kurio dvi kraštinės yra 2 ir 7, o aukštinė, nuleista į trečiąją kraštinę yra kitų dviejų aukštinių geometrinis vidurkis? (Teigiamų skaičių *a* ir *b* *geometriniu vidurkiu* vadinamas skaičius $\sqrt{a\cdot b}$.)

Sprendimas. Tegu trikampio kraštinės yra $a=2, b=7$ ir *c*, o jo plotas *S*. Aukštinę, nuleistą į kraštinę *a*, pažymėkime h_a, kitas dvi aukštines atitinkamai – h_b ir h_c. Tuomet $h_a=\frac{2S}{a}, h_b=\frac{2S}{b}, h_c=\frac{2S}{c}$. Pagal sąlygą $h_c=\sqrt{h_a\cdot h_b} \Rightarrow \frac{2S}{c}=\sqrt{\frac{2S}{a}\cdot\frac{2S}{b}} \Rightarrow c=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{14}.$

Tačiau $\sqrt{14}<7-2=5$. Todėl toks trikampis neegzistuoja.

8. Paveiksle nubrėžtas kvadratas *ABCD*. Taškas *K* kvadrato kraštinę *BC* dalija pusiau ($BK=KC$), o taškas *L* kvadrato įstrižainę *BD* dalija santykiu $3:1$ ($BL:LD=3:1$). Apskaičiuokite kampo *ALK* didumą.



Sprendimas. Pažymėkime kvadrato kraštinės ilgį *a* ir papildykime brėžinį nubrėždami atkarpą *AK*. Tuomet $AK^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=\frac{5}{4}a^2$. Apskaičiuosime atkarpų *KL* ir *AL* ilgių kvadratus.

Kadangi $BL=3LD,\quad BL+LD=\sqrt{2}\cdot a$, tai $BL=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$. Pagal kosinusų teoremą

$$KL^2=BK^2+BL^2-2BK\cdot BL\cdot\cos45^0=\frac{5a^2}{8},\qquad AL^2=AB^2+BL^2-2AB\cdot BL\cdot\cos45^0=\frac{5a^2}{8}.$$

Kadangi $AK^2 = KL^2 + AL^2$, tai pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą trikampis *ALK* statusis, todėl kampas *ALK* lygus 90^0.

9. Tėvas ir sūnus sutiko tris skirtingo amžiaus kaimynus. Sūnus susidomėjo, kiek kaimynams metų. Tėvas pasakė, kad šių kaimynų metų suma yra 4 kartus didesnė negu jų buto numeris, o sandauga lygi 2450. Apskaičiuokite, kokio amžiaus sutiktieji kaimynai?

Sprendimas. Kadangi $2450 = 1 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, tai norėdami nustatyti kaimynų amžių, turime nagrinėti galimas daliklių sumas ir atrinkti *skirtingų daliklių*, kurių suma dalijasi iš 4, rinkinį: **5+10+49=64**, **7+10+35=52**, **2+25+49=76**, 5+7+70=82, 7+25+14=46, 5+14+35=54, **1+49+50=100**, **1+25+98=124**. Uždavinio sąlygą tenkina šie rinkiniai: (5, 10, 49), (7, 10, 35), (2, 25, 49), (1, 49, 50) (1, 25, 98).

10. Jonas Rietaviškis ir Petras Plungiškis dalyvavo meškeriotojų varžybose – tvenkinyje gaudė žuvis. Petro sugautų žuvų kiekis sudaro 55 procentus abiejų žvejų sugautų žuvų kiekio. Jonas karosų sugavo 25 procentais mažiau, negu Petras, o kitų žuvų Petras sugavo 25 procentais mažiau, negu Jonas. Be to, į Jono kibirą telpa ne daugiau kaip 100 žuvų. Kiek iš viso žuvų sugavo Jonas?

Sprendimas. Tarkime, Petras sugavo *x* karosų, o Jonas – *y* kitų žuvų. Tuomet Jonas sugavo $\frac{3}{4}x$ karosų, o Petras – $\frac{3}{4}y$ kitų žuvų. Iš viso Jonas sugavo $\frac{3}{4}x + y$ žuvų, o Petras – $x + \frac{3}{4}y$ žuvų. Pagal sąlygą sudarome lygtį $\frac{7}{4}(x+y) \cdot 55 = 100 \cdot (x + \frac{3}{4}y)$. Iš jos gauname $3x = 17y$, be to ir *x*, ir *y* turi dalytis iš 4 ($x = 4k$, $y = 4m$). Taigi $3 \cdot 4k = 17 \cdot 4m$ ir mažiausios *k* ir *m* reikšmės, su kuriomis galioja ši lygybė, yra $k = 17$, $m = 3$. Todėl $x = 4 \cdot 17 = 68, y = 4 \cdot 3 = 12$. Vadinasi, Jonas iš viso sugavo $\frac{3}{4} \cdot x + y = \frac{3}{4} \cdot 68 + 12 = 63$ žuvis.

Ats.: 63.