

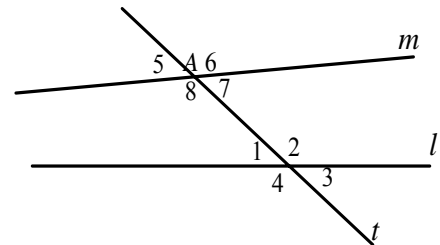


RIETAVO DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2010 m. gruodžio 3 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

- Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais n skaičius $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ yra natūralusis.
- Raskite skaičiaus 12345678910111213..., sudaryto iš 1000 skaitmenų, paskutinįjį skaitmenį.
- Žinoma, kad $xyz > 0$. Įrodykite, kad $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq x + y + z$.
- Raskite visus natūraliuosius skaičius m , su kuriais lygties $x^2 - 5mx + 84 = 0$ sprendiniai yra sveikieji skaičiai.
- Raskite natūralųjį skaičių n , kurio kvadratas lygus $2008 \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot 2011 + 1$.
- Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, su kuriomis galioja lygybė $2x^2 - 2y^2 - 3xy = 7$.
- Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ir $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?
- Brėžinyje pavaizduotos trys tiesės – l , m ir t (tiesės m ir l nėra lygiagrečios!). Susikirsdamos jos sudaro kampus, pažymėtus skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8. Kampas, pažymėtas skaičiumi 7, yra 90° mažesnis negu kampas 8 ir 105° mažesnis negu kampas 2. Kokių kampų pagal laikrodžio rodyklę apie tašką A reikia pasukti tiesę m , kad ji taptų lygiagreči su tiese l ?
- Ant stebuklingo medžio – 60 vaisių: apelsinai ir mandarinai. Berniukas pradėjo skinti vaisius. Kai tik jis nuskina 5 apelsinus, iš karto užauga vienas mandarinas, o kai jis nuskina 10 mandarinų, užauga vienas apelsinas. Po tam tikro laiko ant medžio liko tik vienas apelsinas ir neliko nė vieno mandarino. Kiek apelsinų ant medžio buvo iš pradžių?
- Jonas Rietaviškis ir Petras Plungiškis dalyvavo meškeriojų varžybose – tvenkinyje gaudė žuvis. Petro sugautų žuvų kiekis sudaro 55 procentus abiejų žvejų sugautų žuvų kiekio. Jonas karosų sugavo 25 procentais mažiau negu Petras, o kitų žuvų Petras sugavo 25 procentais mažiau negu Jonas. Be to, į Jono kibirą telpa ne daugiau kaip 100 žuvų. Kiek iš viso žuvų sugavo Jonas?





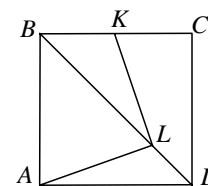
RIETAVO DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2010 m. gruodžio 3 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Raskite trupmeną su pačiu mažiausiu vardikliu, kuri yra tarp trupmenų $\frac{1}{2011}$ ir $\frac{1}{2010}$.
2. Tegu x ir y – sveikieji skaičiai, su kuriais skaičius $6x+11y$ dalijasi iš 31. Įrodykite, kad $x+7y$ dalijasi iš 31.
3. Apskaičiuokite b^b , jeigu $a^b = 81$, $a^c = 3$, $b^c = 2$.
4. Trys skaičiai yra tokie, kad kiekvieną iš jų sudėję su kitų dviejų skaičių kvadratų suma gauname $\frac{1}{2}$. Raskite šiuos skaičius.
5. Raskite natūralųjį skaičių n , su kuriuo galioja lygybė
$$\underbrace{111\dots1}_{100 \text{ sk.}} \underbrace{222\dots2}_{100 \text{ sk.}} = n(n+1)$$
.
6. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$
7. Ar egzistuoja trikampis, kurio dvi kraštinės yra 7 ir 2, o aukštinė, nuleista į trečiąją kraštinę yra kitų dviejų aukštinių geometrinis vidurkis? (Teigiamų skaičių a ir b geometrinis vidurkis vadinamas skaičius $\sqrt{a \cdot b}$.)

8. Paveiksle nubrėžtas kvadratas $ABCD$. Taškas K kvadrato kraštinę BC dalija pusiau ($BK = KC$), o taškas L kvadrato įstrižainę BD dalija santykiu 3:1 ($BL : LD = 3 : 1$). Apskaičiuokite kampo ALK didumą.



9. Tėvas ir sūnus sutiko tris skirtingo amžiaus kaimynus. Sūnus susidomėjo, kiek kaimynams metų. Tėvas pasakė, kad šių kaimynų metų suma yra 4 kartus didesnė negu jų buto numeris, o sandauga lygi 2450. Apskaičiuokite, kokio amžiaus sutiktieji kaimynai.
10. Jonas Rietaviškis ir Petras Plungiškis dalyvavo meškeriojų varžybose – tvenkinyje gaudė žuvis. Petro sugautų žuvų kiekis sudaro 55 procentus abiejų žvejų sugautų žuvų kiekio. Jonas karosų sugavo 25 procentais mažiau negu Petras, o kitų žuvų Petras sugavo 25 procentais mažiau negu Jonas. Be to, į Jono kibirą telpa ne daugiau kaip 100 žuvų. Kiek iš viso žuvų sugavo Jonas?