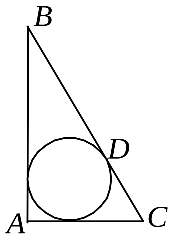
RIETAVO AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2009 m. gruodžio 11 d.

Užduoties jaunesniųjų klasių mokiniams sprendimai

1. Skaičių rinkinyje $\{3, 4, 12\}$ pakeitę bet kuriuos du jo skaičius a ir b skaičiais $0{,}6a - 0{,}8b$ ir $0{,}8a + 0{,}6b$ gausime kitą rinkinį. Gautajam rinkiniui vėl pritaikykime šį veiksmą, ir taip tęskime toliau. Ar tokiu būdu galima gauti skaičių rinkinį $\{4, 6, 12\}$?



Sprendimas. Atkreipkime dėmesį, kad $(0{,}6a - 0{,}8b)^2 + (0{,}8a + 0{,}6b)^2 = a^2 + b^2$. Taigi atlikus minėtą veiksmą, rinkinio skaičių kvadratų suma nesikeičia. Tačiau pirmojo skaičių rinkinio kvadratų suma yra $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$, o antrojo $4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2$. Vadinasi, iš rinkinio $\{3, 4, 12\}$ minėtu būdu neįmanoma gauti rinkinį $\{4, 6, 12\}$. Ats.: Ne

2. Į statųjį trikampį *ABC* įbrėžtas apskritimas, kuris trikampio įžambinę liečia taške *D*. Apskaičiuokite trikampio *ABC* plotą, jeigu $BD = 6,\ DC = 5$.

Sprendimas. Įbrėžtojo apskritimo spindulio ilgį pažymėkime r ir apskaičiuokime trikampio *ABC* plotą: $S = \frac{1}{2}(5 + r)(6 + r) = \frac{1}{2}(r^2 + 11r + 30)$. Pagal Pitagoro teoremą: $(5 + r)^2 + (6 + r)^2 = 121 \Rightarrow$ $r^2 + 11r = 30$. Taigi $S = \frac{1}{2}(r^2 + 11r + 30) = 30$.

Ats.: 30.

3. Sveikieji skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Įrodykite, kad $a^2 + b^2 + c^2$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Įrodymas. Kadangi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, tai $(a + b + c)^2 =$ $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$. Taigi $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$.

4. Raskite visus lygties $x^2 = y^2 + 2y + 13$ sprendinius $(x; y)$, kurių komponentės x ir y yra sveikieji skaičiai.

Sprendimas. Pertvarkykime lygtį: $x^2 - (y + 1)^2 = 12 \Rightarrow (x - y - 1)(x + y + 1) = 12$. Visi galimi atvejai, kurie gaunami skaidant skaičių 12 teigiamais dauginamaisiais, tokie: $\begin{cases} x - y - 1 = 1, \\ x + y + 1 = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y - 1 = 12, \\ x + y + 1 = 1, \end{cases}$

$\begin{cases} x - y - 1 = 3, \\ x + y + 1 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y - 1 = 4, \\ x + y + 1 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y - 1 = 2, \\ x + y + 1 = 6, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y - 1 = 6, \\ x + y + 1 = 2. \end{cases}$ Čia tik paskutiniosios dvi sistemos turi sveikuosius sprendinius (4; 1) ir $(4; -3)$. Iš analogiškų tiesinių lygčių sistemų, gautų skaičių 12 skaidant neigiamais dauginamaisiais, sveikuosius sprendinius turi tik lygčių sistemos: $\begin{cases} x - y - 1 = -2, \\ x + y + 1 = -6, \end{cases}$ ir $\begin{cases} x - y - 1 = -6, \\ x + y + 1 = -2. \end{cases}$ Jų sprendiniai yra $(-4; -3)$, $(-4; 1)$.

Ats.: (4; 1), $(4; -3)$, $(-4; -3)$, $(-4; 1)$.

5. Kokius du skaitmenis reikia prirašyti prie skaičiaus 2009 iš dešinės, kad gautasis skaičius dalytųsi iš 101?

Sprendimas. Skaičių 200900 dalijant iš 101gaunama liekana 11, t. y. $200900=101\cdot1989+11$. Prie šio skaičiaus pridėję 90, gausime skaičių 200990, kuris dalijasi iš 101.

Ats.: 90.

6. Raskite didžiausią triženklį pirminį skaičių $\overline{abc}$, jeigu žinoma, kad skaičius $\overline{cba}$ ir sandauga $a\cdot b\cdot c$ yra pirminiai skaičiai (*pirminiu skaičiumi* vadinamas skaičius, kuris dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto).

Sprendimas. Kad sandauga $a\cdot b\cdot c$ būtų pirminis skaičius, dauginamieji gali būti tik skaitmenys 1, 1, *p*; *p* – pirminis skaičius. Galimos *p* reikšmės: 2, 3, 5, 7. Skaitmuo 7 netinka, nes tuomet skaičiai $\overline{abc}$ dalysis iš 3, taigi nebus pirminiai. Su $p=5$ gauname pirminį skaičių 151, su $p=3$ - 113, 131, 311, su $p=2$ - 211. Didžiausias iš gautųjų pirminių skaičių yra 311.

Ats.: 311.

7. Įrodykite teiginį: jei skaičius $m+4n$ dalijasi iš 13, tai iš 13 dalijasi ir skaičius $10m+n$.

Įrodymas. Teiginio teisingumas išplaukia iš lygybės $10m+n=10(m+4n)-39n$: kadangi $m+4n$ dalijasi iš 13 ir 39 dalijasi iš 13, tai ir $10(m+4n)-39n$ dalijasi iš 13.

8. Raidės *R*, *A*, *S* ir *K* žymi skirtingus skaitmenis. Kokį skaičių gali reikšti užrašas $\overline{RASK}$, jei galioja lygybė $(R+A+S+K)^4=\overline{RASK}$.

Sprendimas. Aišku, kad ieškomojo skaičiaus skaitmenų suma turi neviršyti 9. Atlikus variantų analizę, uždavinio sąlygą tenkina rinkinys yra : $R=2,\ A=4,\ S=0,\ K=1$.

Ats.: 2401.

9. Laikrodis sustojo kai jo valandinė rodyklė rodė 4 val. ir *x* min. Raskite *x*, jeigu valandinė rodyklė ir minutinė rodyklė sudaro vienodus kampus su tiese, einančia per laikrodžio centrą ir 6 val. žymę.

Sprendimas. Tegu kampas tarp valandinės rodyklės ir tiesės (einančios per laikrodžio centrą ir 6 val. žymę) ir tarp minutinės rodyklės ir šios tiesės yra α. Per 1 min minutinė rodyklė pasisuka 6^0 kampu, o valandinė – $0{,}5^0$ kampu. Tuomet $\begin{cases}6x=180+\alpha,\\ 60-\alpha=0{,}5x\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{480}{13}$.

Ats.: $\dfrac{480}{13}$ min.

10. Jonas Rietaviškis, kamuojamas nemigos, vienu metu uždegė dvi vienodo ilgio žvakes – storą ir ploną. Storoji žvakė sudega per 4 val., plonoji – per 2 val. Kai išaušo, Jonas abi žvakes užgesino (tuo pačiu laiko momentu). Kiek laiko degė abi žvakės, jeigu storosios žvakės likutis yra tris kartus ilgesnis, negu plonosios žvakės likutis?

Sprendimas. Tarkime, kad *a* cm – pradinis žvakių ilgis, storosios žvakės sudegė *x* cm, plonosios – 2*x* cm. Pagal sąlygą $a-x=3(a-2x)$. Iš čia $x=\dfrac{2a}{5}$. Kadangi storoji žvakė (*a* cm) sudega per 4 val., tai $\dfrac{2a}{5}$ cm sudega per $\dfrac{2a}{5}\Big/\dfrac{a}{4}=\dfrac{8}{5}=1{,}6$ val.

Ats.: $1{,}6$ val.

RIETAVO AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2009 m. gruodžio 11 d.

Užduoties vyresniųjų klasių mokiniams sprendimai

1. Kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ koeficientai p ir q yra sveikieji skaičiai. Ar gali šios lygties diskriminantas būti lygus 23 ?

Sprendimas. Šios kvadratinės lygties diskriminantas yra $D=p^2-4q$. Jeigu p būtų lyginis skaičius, tai D dalytųsi iš 4. Jeigu p – nelyginis skaičius ($p=2k+1, k\in Z$), tai $D=(2k+1)^2-4q=4(k^2+k-q)+1$, t. y. D dalijant iš 4 gaunama liekana 1. Tuo tarpu skaičiaus 23 dalybos iš 4 liekana yra 3. Taigi diskriminantas būti lygus 23 negali. Ats.: Ne.

2. Kiek skaičiaus 1000! paskutiniųjų skaitmenų yra nuliai? (natūraliojo skaičiaus n faktorialas $n!$ yra skaičių nuo 1 iki n sandauga: $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$).

Sprendimas. Ieškomąjį nulių skaičių gausime apskaičiavę kiek tarp skaičių 1, 2, 3, …, 1000 yra skaičių, besidalijančių iš 5, kiek yra skaičių, kurie dalijasi iš 5^2, kiek yra skaičių, kurie dalijasi iš 5^3, kiek yra skaičių, kurie dalijasi iš 5^4. Apskaičiavę šių skaičių sumą, rasime ieškomąjį nulių skaičių: $200+40+8+1=249$. Ats.: 249.

3. Skaičių rinkinyje $\{3, 4, 12\}$ pakeitę bet kuriuos du jo skaičius a ir b skaičiais $0{,}6a-0{,}8b$ ir $0{,}8a+0{,}6b$ gausime kitą rinkinį. Gautajam rinkiniui vėl pritaikykime šį veiksmą, ir taip tęskime toliau. Ar tokiu būdu galima gauti skaičių rinkinį $\{4, 6, 12\}$?

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį, kad $(0{,}6a-0{,}8b)^2+(0{,}8a+0{,}6b)^2=a^2+b^2$. Taigi atliekant minėtą veiksmą nesikeičia rinkinio skaičių kvadratų suma. Tačiau pirmajam skaičių rinkiniui $3^2+4^2+12^2=13^2$, antrajam $4^2+6^2+12^2=14^2$. Vadinasi, iš rinkinio $\{3, 4, 12\}$ minėtu būdu negausime rinkinio $\{4, 6, 12\}$. Ats.: Ne

4. Raskite penkiaženklį skaičių $\overline{xyztu}$, kuris yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, jeigu $\overline{xy}=u^2$ ir $\overline{yu}$ taip pat yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Užrašykime ieškomąjį skaičių taip:

$\overline{xyztu}=10000x+1000y+100z+10t+u=b^2$. Kadangi $10x+y=u^2$, tai

$\overline{xyztu}=1000(10x+y)+100z+10t+u=1000u^2+100z+10t+u, 0\le u\le 9, 0\le u^2\le 81.$

ir $10y+u=a^2$. Perrinkę u reikšmes, randame, kad su $u=4$ turi būti $x=1, y=6$ (iš lygybės $10x+y=u^2$). Tuomet $16000+100z+10t+4=b^2$ ir iš čia $127\le b\le 130$. Patikrinę šias b reikšmes randame, kad $128^2=16384$. Tai ir yra ieškomasis skaičius. Ats.: 16384.

5. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases}(x+y)^3=z,\\(y+z)^3=x,\\(z+x)^3=y.\end{cases}$

Sprendimas. Jeigu būtų $x\ge y$, tai iš antros ir trečios lygčių $y+z\ge z+x\Rightarrow y\ge x$. Vadinasi, $x=y$, Taip pat samprotaudami įsitikinsime, kad $x=z$ (iš pirmos ir antros lygčių). Taigi $x=y=z$. Tuomet užtenka išspręsti lygtį $8x^3=x$:

$8x^3 = x \Rightarrow x(8x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ arba $x = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ats.: (0;0;0), $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

6. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n skaičius $2^{4n} + 2^{2n} + 1$ yra sudėtinis (skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto, vadinami *pirminiais skaičiais*; visi kiti natūralieji skaičiai – *sudėtiniai*).

Įrodymas. Tegu $x = 2^n$. Tuomet $2^{4n} + 2^{2n} + 1 = x^4 + x^2 + 1$. Tačiau $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$. Taigi skaičius $2^{4n} + 2^{2n} + 1$ su visais natūraliaisiais n yra sudėtinis.

7. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais a, b ir c galioja nelygybė

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Įrodymas. I būdas. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \Leftrightarrow$ $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

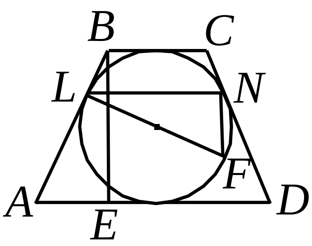
II būdas. Panariui sudėję nelygybes $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$ ir gautąją nelygybę padalinę iš 2, gausime reikalingą nelygybę.

8. Apskaičiuokite sumą $S_{2009} = 1 + \dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} + \dfrac{1}{1+2+3+4} + \ldots + \dfrac{1}{1+2+3+\ldots+2009}$.

Sprendimas. $1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1+2+\ldots+k} = \dfrac{2}{k(k+1)} = 2\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) \Rightarrow$

$S_{2009} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots \dfrac{1}{2008} - \dfrac{1}{2009}\right) = 2\left(1 - \dfrac{1}{2009}\right) = \dfrac{4016}{2009}$. Ats.: $\dfrac{4016}{2009}$.

9. Apie spindulio R apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija. Šoninių trapecijos kraštinių lietimosi su apskritimu taškai sujungti lygiagrečia su pagrindais styga, kurios ilgis 6. Raskite trapecijos plotą.



Sprendimas. $S = \dfrac{AD + BC}{2R}$. Atkarpos LF ir AB, taip pat LN ir BE – statmenos. Todėl kampai FLN ir ABE – lygūs, o trikampiai FLN ir ABE – panašūs. Tuomet $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{LF}{LN} \Rightarrow AB = CD = \dfrac{4R^2}{6}$.

Kadangi $AD + BC = AB + CD$, tai $S = \dfrac{4R^2}{6} \cdot 2R = \dfrac{4}{3}R^3$.

10. Šachmatų turnyre, kuriame kiekvienas šachmatininkas su kiekvienu kitu šachmatininku susitinka po vieną kartą, dalyvavo $n \geq 17$ žaidėjų. Už pergalę skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – 0,5 taško, pralaimėjus taškai neskiriami. Vienuolika turnyro dalyvių surinko ne daugiau kaip po 5 taškus. Kiek dalyvių surinko 8,5 taško ?

Sprendimas. Nagrinėkime 11 žaidėjų, surinkusių ne daugiau kaip 5 taškus, grupę. Jie tarpusavyje žaidė $\dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$ partijas. Pagal sąlygą jie kartu surinko ne daugiau kaip 55 taškus. Taigi jie visus taškus surinko žaisdami tarpusavyje. Vadinasi, šios grupės nariai su kitais dalyviais visas partijas pralošė ir todėl visi kiti dalyviai surinko ne mažiau kaip 11 taškų. Taigi dalyvių, surinkusių 8,5 taško, nėra.