

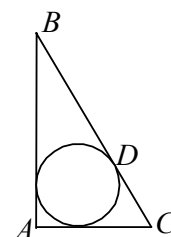


RIETAVO AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2009 m. gruodžio 11 d.
Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Skaičių rinkinyje $\{3, 4, 12\}$ pakeitę bet kuriuos du jo skaičius a ir b skaičiais $0,6a - 0,8b$ ir $0,8a + 0,6b$ gausime kitą rinkinį. Gautajam rinkiniui vėl pritaikykime šį veiksma, ir taip tęskime toliau. Ar tokiu būdu galima gauti skaičių rinkinį $\{4, 6, 12\}$?

2. Į statųjį trikampį ABC įbrėžtas apskritimas, kuris trikampio išambinę liečia taške D . Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, jeigu $BD = 6$, $DC = 5$.



3. Sveikieji skaičiai a , b ir c tenkina sąlygą $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Įrodykite, kad $a^2 + b^2 + c^2$ yra sveikiojo skaičiaus kvadratas.
4. Raskite visus lygties $x^2 = y^2 + 2y + 13$ sprendinius $(x; y)$, kurių komponentės x ir y yra sveikieji skaičiai.
5. Kokius du skaitmenis reikia prirašyti prie skaičiaus 2009 iš dešinės, kad gautasis skaičius dalytųsi iš 101?
6. Raskite didžiausią triženklį pirminį skaičių \overline{abc} , jeigu žinoma, kad skaičius \overline{cba} ir sandauga $a \cdot b \cdot c$ yra pirminiai skaičiai (*pirminiu skaičiumi* vadinamas skaičius, kuris dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto).
7. Įrodykite teiginį: jei skaičius $m + 4n$ dalijasi iš 13, tai iš 13 dalijasi ir skaičius $10m + n$.
8. Raidės R , A , S ir K žymi skirtingus skaitmenis. Kokį skaičių gali reikšti užrašas \overline{RASK} , jei galioja lygybė $(R + A + S + K)^4 = \overline{RASK}$.
9. Laikrodys sustojo kai jo valandinė rodyklė rodė 4 val. ir x min. Raskite x , jeigu valandinė rodyklė ir minutinė rodyklė sudaro vienodus kampus su tiese, einančia per laikrodžio centrą ir 6 val. žymę.
10. Jonas Rietaviškis, kamuojamas nemigos, vienu metu uždegė dvi vienodo ilgio žvakes – storą ir ploną. Storoji žvakė sudega per 4 val., plonoji – per 2 val. Kai išaušo, Jonas abi žvakes užgesino (tuo pačiu laiko momentu). Kiek laiko degė abi žvakės, jeigu storosios žvakės likutis yra tris kartus ilgesnis, negu plonosios žvakės likutis?



RIETAVO AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2009 m. gruodžio 11 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ koeficientai p ir q yra sveikieji skaičiai. Ar gali šios lygties diskriminantas būti lygus 23 ?
2. Keliai nuliais baigiasi skaičius $1000!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$) ?
3. Skaičių rinkinyje $\{3, 4, 12\}$ pakeitę bet kuriuos du jo skaičius a ir b skaičiais $0,6a - 0,8b$ ir $0,8a + 0,6b$ gausime kitą rinkinį. Gautajam rinkiniui vėl pritaikykime šį veiksmą, ir taip tęskime toliau. Ar tokiu būdu galima gauti skaičių rinkinį $\{4, 6, 12\}$?
4. Raskite penkiaženklį skaičių \overline{xyztu} , kuris yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, jeigu $\overline{xy} = u^2$ ir \overline{yu} taip pat yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

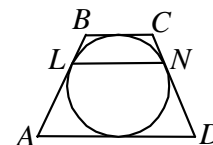
5. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} (x + y)^3 = z, \\ (y + z)^3 = x, \\ (z + x)^3 = y. \end{cases}$$

6. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n skaičius $2^{4n} + 2^{2n} + 1$ yra sudėtinis.
7. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais a, b ir c galioja nelygybė

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

8. Apskaičiuokite sumą

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2009}.$$



9. Apie spindulio R apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija (žr. pav.). Šoninių trapecijos kraštinių lietimosi su apskritimu taškai sujungti lygiagrečia su pagrindais styga, kurios ilgis 6. Raskite trapecijos plotą.
10. Šachmatų turnyre, kuriame kiekvienas šachmatininkas su kiekvienu kitu šachmatininku susitinka po vieną kartą, dalyvavo $n \geq 17$ žaidėjų. Už pergalę skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – 0,5 taško, pralaimėjus taškai neskiriami. Vienuolika turnyro dalyvių surinko ne daugiau kaip po 5 taškus. Kiek dalyvių surinko 8,5 taško ?