



Rietavo šeštoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2007 m. gruodžio 8 d.

Užduoties jaunesniųjų klasių mokiniams sprendimai

1. Iš eilės surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 100. Kiek kartų pasikartoja kiekvienas skaitmuo?
Sprendimas. Šioje skaičių eilėje įeina: 0 -11 kartų, 1-21 kartą, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – po 20 kartų (iš viso 192 skaitmenys).

2. Ar galima skaičius nuo 1 iki 36 surašyti į kvadratinę 6×6 lentelę taip, kad gretimuose stulpeliuose parašytų skaičių sumos skirtųsi vienetu? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Negalima, nes surašius skaičius kaip prašoma, šalia stovinčių stulpelių skaičių sumos būtų priešingo lyginumo, ir tuomet visų stulpelių suma (t. y. visų lentelės skaičių suma) būtų nelyginė. Tuo tarpu suma $1 + 2 + 3 + \dots + 36$ yra lyginis skaičius.

Ats.: Negalima.

3. Natūralusis skaičius n turi du daliklius, o skaičius $n+1$ turi tris daliklius. Nustatykite, kiek daliklių turi natūralusis skaičius $n+2$.

Sprendimas. Aišku, kad n yra pirminis skaičius. Be to, $n \neq 2$, nes tada $(n+1)$ būtų pirminis skaičius 3 ir turėtų tik du daliklius. Taigi n yra nelyginis pirminis skaičius. Tada $n+1$ yra lyginis skaičius. Jo dalikliai turi būti 1, 2 ir $n+1$. Bet $n+1 = 2k$; todėl ir k turi būti daliklis. Jei $k > 2$, tai $n+1$ turėtų ne mažiau kaip 4 daliklius. Vadinasi, $k = 2$. Gauname, jog $n+1 = 4$ ir $n+2 = 5$. Pastarasis skaičius turi 2 daliklius.

Ats.: 2.

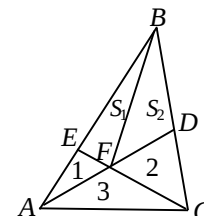
4. Kvadratinės lentelės, kurios matmenys 4×4 , langelius reikia užpildyti nuliais ir vienetais taip, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje būtų po du nulius ir po du vienetus. Nustatykite, kokius skaičius reikia įrašyti vietoj x ir y , kai lentelė pradėta pildyti taip, kaip parodyta paveiksle.

1	0	1	0
0	0	1	1
1	$x=1$	0	0
0	$y=1$	0	1

5. Tegu a, b – stačiojo trikampio statinių ilgiai, o c – įžambinės ilgis. Įrodykite, kad $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Sprendimas. $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} \Rightarrow 2c^2 \geq (a+b)^2 \Rightarrow a+b \leq c\sqrt{2}$. Lygybė galima tik tuomet kai $a = b$.

6. Trikampis ABC atkarpomis AD ir CE padalintas į keturias dalis: į trikampius AEF , CFD , AFC ir keturkampį $BEFD$. Trikampių AEF , CFD ir AFC plotai atitinkamai lygūs 1, 2 ir 3. Apskaičiuokite keturkampio $BEFD$ plotą.



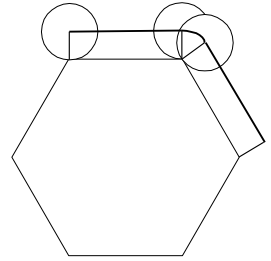
Sprendimas. Taškus B ir F sujunkime atkarpa ir tegu trikampio EBF plotas yra S_1 , o trikampio

DFB plotas - S_2 . Tuomet $\frac{S_2 + 2}{S_1} = \frac{3}{1}$ ir $\frac{S_1 + 1}{S_2} = \frac{3}{2}$. Gauname lygčių sistemą $\begin{cases} 3S_1 - S_2 = 2, \\ 2S_1 - 3S_2 = -2 \end{cases}$.

Jos sprendinys yra: $S_1 = \frac{8}{7}$, $S_2 = \frac{10}{7}$. Taigi $S_1 + S_2 = \frac{18}{7}$. *Ats.: $\frac{18}{7}$*

7. Taisyklingojo šešiakampio kraštinės ilgis 4 cm. Apie jį liesdama kraštinės rieda 2 cm skersmens moneta. Apskaičiuokite šios monetos centro trajektorijos ilgį monetai apsukus apie daugiakampį vieną ratą ir sugrįžus į pradinę padėtį.

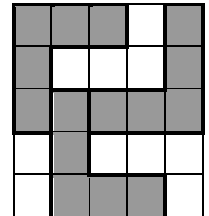
Sprendimas. Monetos centras aprašys trajektoriją, kurią sudaro šešios ilgio 4 atkarpos (bendras ilgis: $4 \cdot 6 = 24$) ir šeši apskritimo su spinduliu 1 lankai, kurių kiekvieno centrinis kampas lygus 60° (taigi iš viso $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ - visas apskritimas, kurio ilgis 2π). Vadinasi, monetos centro trajektorijos ilgis lygus $24 + 2\pi$. Ats.: $24 + 2\pi$.



8. Kvadrato 5×5 nubrėžtos trys nesikertančios (neturinčios bendrų langelių) „penkialangės“ figūros (žr. pav.).

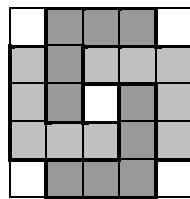
Ar galima šiame kvadrato nubrėžti keturias nesikertančias tokias figūras?

Ar galima šiame kvadrato nubrėžti penkias nesikertančias tokias figūras?

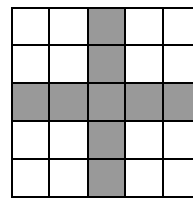


Sprendimas. Atsakymas į pirmą klausimą yra teigiamas. Jį galima pagrįsti konkrečiu pavyzdžiu (žr. 1 pav.).

Atsakymas į antrąjį klausimą yra neigiamas. Nubrėžus 9 langelių kryžių (žr. 2 pav.), galima lengvai išsiaiškinti, kad kiekviena nagrinėjamos formos 5 langelių figūra uždengia ne mažiau kaip du šio kryžiaus langelius.



1 pav.



2 pav.

9. Romos imperatorius Neronas labai mėgo žaidimus. Kiekvieną pavasarį jis organizuodavo šventę, kurios dalyviai karo vežimais (į kiekvieną vežimą susėsdavo po tą patį skaičių karių) turėdavo nuvažiuoti tam tikrą atstumą ir sugrįžti atgal. Kartą pusiaukelėje sulūžo 10 vežimų, o jų keleivius priėmė kiti vežimai – kiekvienas po vieną karį, ir kelionė tęsėsi. Grįžtant atgal sulūžo dar 15 vežimų, jų keleivius po lygiai pasidalino kiti vežimai. Kiek karo vežimų ir kiek karių dalyvavo žaidime, jeigu kiekviename vežime sugrįžo trim kariais daugiau, negu išvyko?

Sprendimas. Tarkime, kad žaidime dalyvavo k karo vežimų, o į kiekvieną vežimą kelionės pradžioje susėdo po m karių. Tuomet karių iš viso buvo $m \cdot k$. Pagal uždavinio sąlygą:
$$\begin{cases} (k-10)(m+1) = mk, \\ (k-25)(m+3) = mk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-10m=10, \\ 3k-25m=75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=100, \\ m=9. \end{cases}$$
 Taigi $m \cdot k = 900$. Ats.: 100, 900.

10. Jonas Rietaviškis savo bibliotekos lentynas nutarė pakeisti naujomis. Parduoatuvėje – dviejų rūšių lentynos – ąžuolo ir uosio. Jeigu jis pirktų 6 ąžuolo ir 11 uosio lentynų, tai į jas tilptų ne daugiau kaip 30 procentų bibliotekos knygų, o į 21 ąžuolo ir 16 uosio lentynų jis sutalpintų daugiau kaip 60 procentų knygų. Ar į 29 ąžuolo lentynas telpa trečdalis J. Rietaviškio bibliotekos knygų?

Sprendimas. Tarkime, kad J. Rietaviškio bibliotekoje yra n knygų. Tuomet
$$\begin{cases} 6x + 11y \leq 0,3n \\ 21x + 16y \geq 0,6n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -96x - 176y \geq -4,8n \\ 231x + 176y \geq 6,6n \end{cases}$$
 . Sudėję šias nelygybes gauname nelygybę $135x \geq 1,8n$, kurią padauginę iš

$\frac{29}{135}$, turėsime, kad $29x \geq 0,38n > \frac{1}{3}n$.

Ats.: Telpa.



Rietavo šeštoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2007 m. gruodžio 8 d.

Užduoties vyresniųjų klasių mokiniams sprendimas

1. Natūraliųjų skaičių porą $(m; n)$ vadinkime *žemaitiška pora*, jeigu skaičių m ir n didžiausias bendras daliklis yra 7, o suma $m + n$ lygi 119. Kurios žemaitiškos poros skaičių sandauga didžiausia?

Sprendimas. Pažymėkime ieškamuosius skaičius x ir y . Kadangi jų didžiausias bendras daliklis yra 7, tai $x = 7a$, $y = 7b$; čia skaičiai a ir b bendrų daliklių neturi. Pagal sąlygą: $7a + 7b = 119 \Rightarrow a + b = 17$. Nagrinėkime sandaugą $a \cdot b = a \cdot (17 - a)$. Kintamojo a funkcija $f(a) = a \cdot (17 - a)$ yra kvadratinis trinaris, didžiausią reikšmę įgyjantis taške $x = 8,5$. Vadinas, $f(8) = f(9) = 72$ ir tegu $a = 8, b = 9$. Tuomet $x = 7 \cdot 8 = 56$, $y = 7 \cdot 9 = 63$.

Ats.: (56; 63).

2. Realieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybes $\frac{y}{x} = \frac{x-z}{y} = \frac{z}{x+y}$. Raskite skaičių y ir z santykį $\frac{y}{z}$.

Sprendimas. $\frac{y}{x} = \frac{x-z}{y} = \frac{z}{x+y} \Rightarrow \frac{\frac{y}{x}}{\frac{z}{x+y}} = \frac{\frac{x-z}{y}}{\frac{z}{x+y}} = \frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{y}{z}}$. Tegų $\frac{y}{z} = u, \frac{x}{z} = v$. Tuomet turime spręsti lygčių

$$\text{sistemą: } \frac{u}{v} = \frac{v-1}{u} = \frac{1}{v+u} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = \frac{v-1}{u} \\ \frac{u}{v} = \frac{1}{v+u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - u^2 = v \\ u^2 + uv = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 - uv - 2u^2 = 0 \\ v^2 - u^2 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{v}{u}\right)^2 - \frac{v}{u} - 2 = 0 \\ v^2 - u^2 = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{v}{u} = 2 \text{ arba } \frac{v}{u} = -1 \\ v^2 - u^2 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{v}{u} = 2 \\ v^2 - u^2 = v \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} \frac{v}{u} = -1 \\ v^2 - u^2 = v \end{cases}. \text{ Iš pirmosios lygčių sistemos gauname } u = \frac{2}{3},$$

$u = 0$ (netinka); antroji sistema sprendinių neturi. Ats.: $\frac{2}{3}$.

3. Ar galima skaičius nuo 1 iki 100 surašyti į kvadratinę 10×10 lentelę taip, kad gretimuose stulpeliuose parašytų skaičių sumos skirtųsi vienetu? Atsakymą pagrįskite

Sprendimas. Negalima, nes surašius skaičius kaip prašoma, šalia stovinčių stulpelių skaičių sumos būtų priešingo lyginumo, ir tuomet visų stulpelių suma (t. y. visų lentelės skaičių suma) būtų nelyginė. Tuo tarpu suma $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ yra lyginis skaičius.

Ats.: Negalima.

4. Natūralieji skaičiai x, y ir z tenkina lygtį $28x + 30y + 31z = 365$. Raskite sumą $x + y + z$.

Sprendimas. Pirmiausia, jeigu $x + y + z \leq 11$, tai $28x + 30y + 31z \leq 31 \cdot 11 = 341 < 365$. Jeigu $x + y + z \geq 13$, tai $28x + 30y + 31z \geq 28 \cdot 13 = 364$ ir lygybė tenkinama tik su $x = 13, y = z = 0$. Visais kitais atvejais $28x + 30y + 31z \geq 366$. Vadinas, gali būti tik $x + y + z = 12$. Skaičių rinkinys, tenkinantis užduoties sąlygą egzistuoja, pavyzdžiui, $x = 2, y = 1, z = 9$ arba kitas: $x = 1, y = 4, z = 7$ (nekeliamųjų metų vasaris turi 28 dienas, keturi mėnesiai – po 30 dienų ir 7 mėnesiai – po 31 dieną).

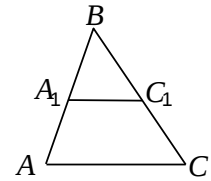
5. Įrodykite, kad skaičius $A = \underbrace{111\dots1}_{2n} - \underbrace{222\dots2}_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ yra kurio nors natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. Kadangi $\underbrace{999\dots9}_n = \underbrace{1000\dots0}_n - 1 = 10^n - 1$, tai $\underbrace{111\dots1}_{2n} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{999\dots9}_{2n} = \frac{1}{9} \cdot (10^{2n} - 1)$ ir

$$\underbrace{222\dots2}_n = \frac{2}{9} \cdot \underbrace{999\dots9}_n = \frac{2}{9} \cdot (10^n - 1). \text{ Tuomet}$$

$$A = \frac{1}{9} \cdot (10^{2n} - 1) - \frac{2}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{1}{9} \cdot (10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2) = \frac{1}{9} \cdot (10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1) = \left(\frac{10^n - 1}{3} \right)^2$$

6. Trikampių ABC ir A_1BC_1 perimetrai yra atitinkamai lygūs a ir b . Atkarpa A_1C_1 yra lygiagreti su trikampio pagrindu AC , o į trapeciją AA_1C_1C galima įbrėžti apskritimą. Raskite kraštinės AC ilgį.



Sprendimas. $a = AB + BC + AC$, $b = A_1B + BC_1 + A_1C_1$. Atimkime iš pirmosios lygybės antrąją: $a - b = AA_1 + CC_1 + AC - A_1C_1$. Kadangi $AA_1 + CC_1 = AC + A_1C_1$, tai $a - b = AC + A_1C_1 + AC - A_1C_1 = 2AC$.

Iš čia $AC = \frac{a - b}{2}$. *Ats.:* $\frac{a - b}{2}$.

7. Įrodykite, kad per parabolę $y = x^2 + x - 13$ ir $x = y^2 + y - 12$ susikirtimo taškus galima nubrėžti apskritimą. Raskite šio apskritimo spindulio ilgį ir centro koordinatės.

Sprendimas. $\begin{cases} y = x^2 + x - 13, \\ x = y^2 + y - 12 \end{cases} \Rightarrow x + y = x^2 + y^2 + x + y - 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow R = 5$, centras taške

$(0;0)$. *Ats.:* $R = 5, (0;0)$.

8. Išspręskite lygtį $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.

Sprendimas. $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5 \Leftrightarrow ((x^2 - x - 1)^2 - 4) - (x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow ((x^2 - x - 1) - 2)(x^2 - x - 1) + 2 - (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 3)(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$, nes $x^2 - x + 1 > 0$ su visais $x \in \mathbb{R}$. Lygties $x^2 - 2x - 4 = 0$ sprendiniai yra $x = 1 \pm \sqrt{5}$. *Ats.:* $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

9. Trupmeną $\frac{a}{b}$ galima pakeisti bet kuria iš trupmenų $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a-b}{b}$ ir $\frac{b}{a}$. Ar iš trupmenos $\frac{1}{2}$ šiais keitiniais galima gauti trupmeną $\frac{67}{91}$? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Pirmiausia atkreipkime dėmesį: jei minėtais veiksmiais $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{c}{d}$, tai ir $\frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Panagrinėkime trupmeną $\frac{67}{91}$:

$$\frac{67}{91} \rightarrow \frac{91}{67} \rightarrow \frac{24}{67} \rightarrow \frac{67}{24} \rightarrow \frac{43}{24} \rightarrow \frac{19}{24} \rightarrow \frac{24}{19} \rightarrow \frac{5}{19} \rightarrow \frac{19}{5} \rightarrow \frac{14}{5} \rightarrow \frac{9}{5} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{5}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{4}{1} \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow \frac{1}{2}. \text{ Vadinasi, ir } \frac{1}{2} \rightarrow \frac{67}{91}.$$

Ats.: Galima.

10. Jonas Rietaviškis savo bibliotekos lentynas nutarė pakeisti naujomis. Parduotuvėje yra dviejų rūšių lentynos – ąžuolo ir uosio. Jeigu jis pirktų 6 ąžuolo ir 11 uosio lentynų, tai į jas tilptų ne daugiau kaip 30 procentų bibliotekos knygų, o į 21 ąžuolo ir 16 uosio lentynų jis sutalpintų daugiau kaip 60 procentų knygų. Ar į 29 ąžuolo lentynas telpa trečdalis J. Rietaviškio bibliotekos knygų?

Sprendimas. Tarkime, n – knygų skaičius bibliotekoje, x knygų telpa vienoje ąžuolo lentynoje, o y knygų – vienoje uosio lentynoje. Tuomet:

$$\begin{cases} 6x + 11y \leq 0,3n, \\ 21x + 16y \geq 0,6n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -96x + 176y \geq -4,8n, \\ 231x + 176y \geq 6,6n \end{cases}$$

Sudėję šias nelygybes, gauname: $135x \geq 1,8n \Rightarrow 29x \geq 0,38n > \frac{1}{3}n$.

Ats.: Telpa.