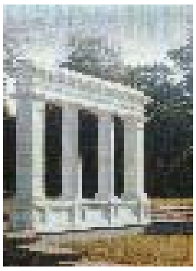
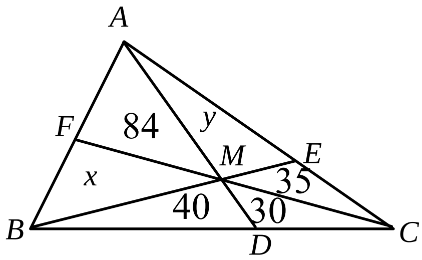


Rietavo penktoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2006 m. sausio 28 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Trikampio ABC viduje pažymėtas bet kuris taškas M. Iš trikampio viršūnių per šį tašką išvestos atkarpos AD, BE, CF (žr. pav.). Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, jeigu žinomi šių trikampių plotai: $S_{AMF} = 84$, $S_{BMD} = 40$, $S_{DMC} = 30$, $S_{CME} = 35$.



2. Ar yra trikampis, kurio aukštinės lygios $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ir $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$?

3. Jeigu rugsėjo pirmąją į klasę ateitų papildomai tiek berniukų, kiek dabar joje yra mergaičių, tai mergaičių procentas klasėje sumažėtų 1,4 karto. Kiek procentų berniukų yra klasėje?

4. Kiek yra keturženklių skaičių, kuriuos užrašant reikia bent vieno lyginio skaitmens?

5. Du dviženkliai pirminiai skaičiai gaunami vienas iš kito perstačius skaitmenis, o jų skirtumas yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Kokie tie pirminiai skaičiai?
   Pirminiais skaičiais vadinami natūralieji skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir vieneto.

6. Penkiaženkliai skaičiai su skirtingais skaitmenimis sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4 ir 5. Kiek tarp šių skaičių yra tokių, kurie dalijasi iš 4?

7. Jurgis sugalvojo natūralųjį skaičių ir padaugino jį iš 13, užbraukė gautosios sandaugos paskutinįjį skaitmenį ir gautą skaičių padaugino iš 7. Po to gautosios sandaugos paskutinįjį skaitmenį vėl užbraukė ir gavo skaičių 21. Kokį skaičių buvo sugalvojęs Jurgis?

8. Kuris iš skaičių $(2006!)^2$ ar 2006^{2006} yra didesnis? Atsakymą pagrįskite.
   Natūraliojo ***skaičiaus n faktorialu*** $n!$ vadiname: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

9. Raskite visus lygties $x^3 + 7y = y^3 + 7x$ sveikuosius teigiamus sprendinius.

10. Trys skirtingi teigiami realieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybę $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$.

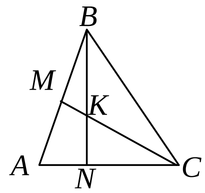
    Apskaičiuokite $\frac{x}{y}$.

Rietavo penktoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2006 m. sausio 28 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams

1. Raskite mažiausią teigiamą realųjį skaičių, kurio ir 15%, ir 33% yra natūralieji skaičiai.
2. Išspręskite lygtį $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36 = 0$.
3. Kiek iš viso skaitmenų reikia užrašyti skaičiams 2^{2006} ir 5^{2006}?
4. Raskite tris natūraliuosius skaičius, kurių visų trijų ir kiekvienų dviejų suma būtų kvadratai.
5. Skaičiai m ir n – sveikieji, tenkinantys nelygybę $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$. Įrodykite, kad $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}\, n^2}$.
6. Apskaičiuokite $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2$.
7. Teigiamas ar neigiamas yra reiškinys $\cos\frac{3}{6-x}$ su x reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybę $3x^2 - 31x + 80 < 0$?
8. Seka $x_1, x_2, x_3, \ldots$ apibrėžta rekurentiškai lygybėmis $\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \end{cases}$. Įrodykite, kad $x_{20000} > 200$.
9. Trikampyje ABC $\angle BAC = 60^0$, K – pusiaukraštinės CM ir aukštinės BN susikirtimo taškas, $CK = 6\,cm$, $KM = 1\,cm$ (žr. pav.). Raskite kitus du trikampio kampus.



10. Dviejų Rietavo krašto ūkininkų – kaimynų Petro ir Jono žemes skiria tvora $ABCD$, kurios dalių ilgiai tokie: $AB = 30\,m$, $BC = 24\,m$, $DC = 10\,m$. Jie nusprendė tvorą ištiesinti, t. y. užtverti tiesią tvorą AF, tačiau taip, kad nei vienas, nei kitas neprarastų žemės (žr. pav.). Raskite atkarpos FD ilgį.