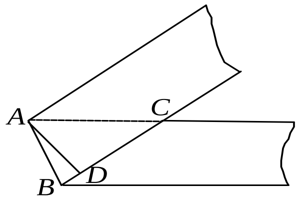
Rietavo ketvirtoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

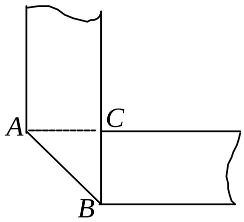
Rietavas, 2005 m. sausio 29 d.

Užduoties jaunesniųjų klasių moksleiviams sprendimas

1. Popierinė juostelė, kurios plotis 6 cm, sulenkta taip, kaip parodyta paveiksle. Persidengiančios juostelės dalys sudaro trikampį *ABC*. Kaip reikia perlenkti juostelę, kad trikampio *ABC* plotas būtų mažiausias? Raskite tą plotą.



Sprendimas. Išveskime trikampio *ABC* aukštinę *AD*. Tuomet $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$. Atkarpa *AD* statmena juostelės kraštams, todėl |*AD*|=6 *cm*. Taškai *B* ir *C* taip pat yra juostelės kraštuose, todėl $|BC| \geq 6\ cm$. Taigi $S_{ABC} \geq \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$. Trikampį su tokio dydžio plotu gausime, kai aukštinė *AD* sutaps su kraštine *AC*, t.y., kai $AC \perp BC$ (žr. pav.).



2. Turistas dykuma turi įveikti 80 km. atstumą. Kuprinėje jis gali neštis maisto ir vandens atsargų tik trims dienoms. Per vieną dieną jis nueina 20 km. Pakeliui kas 20 km yra trys stovyklavietės, kuriose turistas gali palikti saugojimui maistą ir vandenį. Kaip turi keliauti turistas, kad kiekvieną kelionės dieną jis turėtų maisto ir vandens? Kiek mažiausiai dienų jis užtruks kelionėje?

Sprendimas. Turistas 80 km. atstumą gali įveikti dviem etapais. Iš pradžių, paėmęs maisto ir vandens atsargų trims dienoms, nueina iki pirmosios stovyklavietės ir ten palikęs maisto ir vandens vienai dienai, sugrįžta atgal. Po to jis, paėmęs atsargų trims dienoms, vėl leidžiasi į kelionę. Pirmoje stovyklavietėje pasiėmęs paliktas atsargas, turistas galės nueiti likusius 60 km. Taigi kelionėje turistas užtruks 6 dienas – dvi pirmame etape ir keturias antrame etape.

3. Visi natūralieji skaičiai pradedant vienetu surašyti į eilę: $12345678910111213141516171819202122\ldots..$ Koks šios eilės 2005-asis skaitmuo?

Sprendimas. Šioje eilėje yra 9 vienaženkliai skaičiai, 90 dviženklių (180 skaitmenų), 900 triženklių skaičių (2700 skaitmenų) ir t.t. Taigi 2005-asis skaitmuo bus vienas iš triženklių skaičių skaitmenų. Vienaženklių ir dviženklių skaičių skaitmenų iš viso yra 189. Tuomet $2005 - 189 = 1816$ vietų užima triženkliai skaičiai. Kadangi $1816 = 3 \cdot 605 + 1$, tai ieškomasis skaitmuo yra 606-ojo triženklio skaičiaus pirmasis skaitmuo. 605-asis triženklis skaičius yra 704, taigi po jo einančio skaičiaus (705) pirmasis skaitmuo yra 7.

Ats.: 7.

4. Vietoje žvaigždučių įrašykite tinkamus skaičius:

```
 1089708 | 12
-108     |------
 ----    | 90809
   -97
    96
    ---
   -108
    108
    ---
      0
```

5. Ar galima 50 Lt banknotą iškeisti į penkiolika vieno ir penkių litų vertės monetų? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Ne, nes nelyginio skaičiaus (15) nelyginių dėmenų (1 arba 5) suma yra nelyginė, o 50 – lyginis skaičius.

6. Trikampio *ABC* kiekviena kraštinė trumpesnė negu 1cm, o trikampio *DEF* kiekviena kraštinė ilgesnė negu 100 m. Ar galimas atvejis, kad trikampio *ABC* plotas būtų didesnis už trikampio *DEF* plotą?

   Sprendimas. Galimas. Tegu trikampis *ABC* yra lygiakraštis, kurio kraštinė 0,5 cm. Jo plotas lygus $\frac{\sqrt{3}}{16} \approx 0{,}1083\ cm^2$. Trikampis *DEF* tegu bus lygiašonis su pagrindu, lygiu 200m ir su aukštine 10^{-7} m. Tokio trikampio šoninė kraštinė yra ilgesnė negu 100 m. Tuomet $S_{DEF} = 100 \cdot 10^{-7} = 10^{-5}\ m^2 = 0{,}1\ cm^2$. Taigi $S_{ABC} > S_{DEF}$.

7. Įrodykite, kad su visomis nelygiomis nuliui realiosiomis *a* reikšmėmis galioja nelygybė

$$1 + \frac{1}{a^2} \geq \frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}.$$

   Sprendimas. $1 + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + \frac{11}{25a^2} - \frac{2}{5a} = \frac{25a^2 + 25 - 50a + 11 - 10a}{25a^2} = \frac{25a^2 - 60a + 36}{25a^2} = \frac{(5a-6)^2}{25a^2} \geq 0$, jei $a \neq 0$.

8. Pirmasis laikrodis per parą skuba 8 min, o antrasis - vėluoja 4 min.Vidudienį abu laikrodžiai rodo tikslų laiką - 12 valandą. Po kiek parų jie vėl rodys tikslų vidudienio laiką, jeigu abiejų laikrodžių skalėje pažymėtos visos paros valandos: 0 val., 1 val., …, 11 val., 12 val., 13 val., 14 val., …, 22 val., 23 val.?

   Sprendimas. Antrasis laikrodis, per parą vėluodamas 4 min., po 15 parų vėluos 1 val., o po 360 parų. vėluos 24 val. Pirmasis laikrodis, skubėdamas 4 min. per parą, užskubės 48 val. Tačiau šiuo momentu, t. y. po 360 parų, abu vėl rodys tikslų vidudienio (12 val.) laiką.

   Ats. 360 parų.

9. Raskite tokį natūralųjį triženklį skaičių *n*, kad skirtumas $328 - n$ būtų lygus savo skaitmenų sumai.

   Sprendimas. Tegu $n = 100a + 10b + c$. Pagal sąlygą:

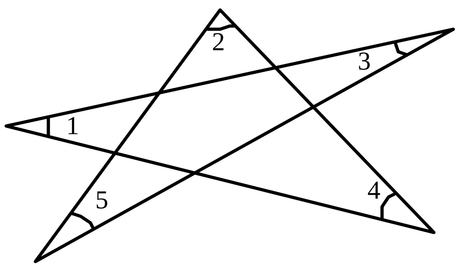
   $328 - (100a + 10b + c) = a + b + c \Rightarrow 328 = 101a + 11b + 2c \Rightarrow 1 \leq a \leq 3$.

   Jeigu $a = 1$, tai $328 = 101 + 11b + 2c \Rightarrow 227 = 11b + 2c$. Tačiau $11b + 2c \leq 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 117$. Todėl šiuo atveju sprendinių nėra.

   Jeigu $a = 2$, tai $328 = 202 + 11b + 2c \Rightarrow 126 = 11b + 2c$. Kadangi $11b + 2c \leq 117$, todėl ir šiuo atveju sprendinių nėra.

   Jeigu $a = 3$, tai $328 = 303 + 11b + 2c \Rightarrow 25 = 11b + 2c \Rightarrow b = 1,\ c = 7$. Taigi ieškomasis skaičius yra 317.

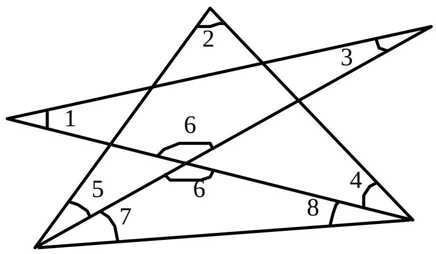
   Ats. 317.



10. Apskaičiuokite penkiakampės žvaigždės (žr. pav.) kampų, pažymėtų skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, sumą.

   Sprendimas. Sujunkime 4-ojo ir 5-ojo kampų viršūnes atkarpa.

   Skaičiumi 6 pažymėti lygūs (kryžminiai) kampai. Kampų 1, 3 ir 6 (kaip ir 6, 7 ir 8) suma lygi 180^0. Vadinasi, 1 ir 3 kampų suma lygi 7 ir 8 kampų sumai. Tuomet vietoje 1, 2, 3, 4 ir 5 kampų sumos galime ieškoti kampų 2, 4, 8, 7 ir 5 sumos. Ši suma lygi 180^0 (trikampio vidaus kampų suma).

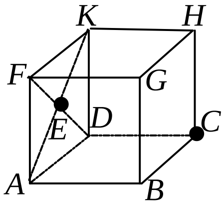


Rietavo ketvirtoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

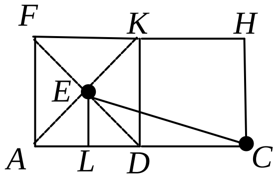
Rietavas, 2005 m. sausio 29 d.

Užduoties vyresniųjų klasių moksleiviams sprendimas

1. Kubo *ABCDFGHK* briaunos ilgis 2 cm. Sienos *AFKD* centre (taške E) yra voras. Koks trumpiausias voro kelias į tašką *C* kubo paviršiumi?



Sprendimas. Išklotinėje (žr. pav.) trumpiausias voro kelias yra atkarpa *EC*. Iš stačiojo trikampio *LEC* pagal Pitagoro teoremą $EC = \sqrt{EL^2 + LC^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.
Ats. $\sqrt{10}$.



2. Jonas važiuodamas autobusu likus 10 sekundžių iki stotelės pastebėjo priešinga kryptimi einančią klasės draugę Ritą ir nusprendė su ja susitikti. Išlipęs iš autobuso jis ėmė vytis Ritą. Po kelių minučių nuo pastebėjimo momento Jonas pasivys draugę, jeigu Jono greitis yra du kartus didesnis negu Ritos ir penkis kartus mažesnis negu autobuso?

Sprendimas. Tarkime, Jonas pastebėjo draugę taške *B*. (žr. pav., rodykle pažymėta autobuso važiavimo kryptis). Po 10 sekundžių jis išlipo iš autobuso (taške *C*) ir pradėjo vytis Ritą. Ją pasivijo

taške *A*. Tegu Jono greitis yra *x* m/s. Tuomet autobuso greitis yra $5x$ m/s, o $\frac{x}{2}$ m/s – Ritos greitis. Dar tarkime, kad atstumą *BA* Rita nuėjo per *t* s. Per tą patį laiką Jonas autobusu nuvažiavo kelio atkarpą *BC* ir nuėjo atkarpą *CA*. Atstumą *BC* autobusas nuvažiavo per 10 s. Vadinasi, atkarpą *CA* Jonas ėjo $(t-10)$ s. Tačiau $CA = BC + BA$. Sudarome lygtį $x(t-10) = 5x \cdot 10 + \frac{x}{2}t$. Iš čia $t = 120\,s = 2$ min.
Ats. 2 min.

3. Ar dvidešimtženkliame skaičiuje tarp jo skaitmenų nekeičiant jų tvarkos galima sudėlioti sudėties, atimties, daugybos ženklus bei skliaustus taip, kad atlikę veiksmus, gautume nulį?

   Sprendimas. Prieš pirmąjį skaitmenį parašykime ženklą "+", o prieš tolesnius skaitmenis sudėkime ženklus "+" arba "– " vadovaudamiesi tokia taisykle: jei prieš tai gautoji suma teigiama, tai prieš tolesnį skaitmenį rašome "– ", jeigu neigiama, - tai rašome "+".

   Jeigu po tokio eilinio veiksmo gavome nulį, tai šią algebrinę sumą apskliauskime. Apskliauskime ir visus likusius skaitmenis, parašę tarp jų bet kokius ženklus. Padėję tarp šių dviejų skliaustų daugybos ženklą, gausime nulį.

   Jeigu nulio nė viename žingsnyje nesigavo, samprotausime taip. Gautos 20 algebrinių sumų (vieno skaitmens, dviejų pirmųjų skaitmenų, trijų skaitmenų ir t.t.… , visų 20 skaitmenų). Kiekvienos tokios sumos skirtingų reikšmių gali būti tik 18 (t.y. $-9, -8, -7, ..., -1, 1, 2, ..., 9$). Vadinasi, mažiausiai dvi tokios sumos turi būti lygios. Tarkime, kad sutapo *n*-oji ir *m*-oji sumos;

čia $m > n$. Tačiau tuomet algebrinė suma skaitmenų pradedant $(n+1)$-uoju ir baigiant m-uoju turi būti lygi nuliui. Šią lygią nuliui sumą apskliauskime, taip pat apskliauskime sumą, esančią prieš šiuos skliaustus, ir sumą, esančią už šių skliaustų. Parašę tarp šių trijų skliaustų daugybos ženklus, gausime nulį.
Ats. Taip.

4. Prisiminkime, kad natūraliojo skaičiaus n *faktorialu* vadiname $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$. Tegu $N = 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot \ldots \cdot 100!$. Kurį dauginamąjį (faktorialą) iš šios skaičiaus N išraiškos reikia išbraukti, kad likusioji sandauga būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas?
   Sprendimas. Įrašykime faktorialų išraiškas:
   $N = 1\cdot(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot \ldots \cdot\ (1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 100)$
   Matome, kad sandaugoje daugiklis 1 pasikartoja100 kartų, daugiklis 2 - 99 kartus, 3 - 98 kartus ir t.t., daugiklis 100 – vieną kartą. Vadinasi, $N = 2^{99}\cdot 3^{98}\cdot 4^{97}\cdot \ldots \cdot 99^2\cdot 100$, taigi skaičių N galima užrašyti pavidalu $N = a^2\cdot 2\cdot\ 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 98\cdot 100$. Kiekviename lyginiame skaičiuje atskirkime daugiklį 2. Gausime $N = a^2\cdot 2^{50}\cdot\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 49\cdot 50 = a^2\cdot 2^{50}\cdot 50!$.
   Vadinasi, užtenka išbraukti $50!$ - ir tuomet faktorialų sandauga bus kvadratas.

5. Trikampio kraštinių ilgiai yra a, b ir c, o jo plotas $S = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$. Apskaičiuokite trikampio kampus A, B ir C (kraštinė a yra prieš kampą A, b – prieš kampą B, c – prieš C).
   Sprendimas. $S = \frac{1}{2}ab\cdot\sin C = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$. Iš čia $\sin C = \frac{a^2+b^2}{2ab} = 1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}$. Kadangi $\sin C \le 1$, tai $\frac{(a-b)^2}{2ab} \le 0$. Tačiau $\frac{(a-b)^2}{2ab} \ge 0$, todėl $\frac{(a-b)^2}{2ab} = 0$ ir todėl $a = b, \sin C = 1$.
   Taigi $\angle C = 90^0$, $\angle A = \angle B = 45^0$.

6. Išspręskite nelygybę $(x^2-4x)^2 \ge 16$.
   Sprendimas.
$(x^2-4x)^2-16 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2-4x+4)(x^2-4x-4) \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-(2+\sqrt{8}))\cdot(x-(2-\sqrt{8})) \ge 0$
$\Rightarrow x \in (-\infty; 2-\sqrt{8}) \cup \{2\} \cup (2+\sqrt{8}; +\infty)$.

7. Išspręskite lygtį $2x^2+6xy+5y^2-6y+18 = 0$.
   Sprendimas. Padauginę abi lygties puses iš 2, gausime $4x^2+12xy+10y^2-12y+36 = 0$.
Tuomet: $4x^2+12xy+9y^2+y^2-12y+36 = 0 \Leftrightarrow (2x+3y)^2+(y-6)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 2x+3y = 0, \\ y-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9, \\ y = 6. \end{cases}$$
   Ats. $(-9; 6)$.

8. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras, su kuriomis galioja lygybė $x+y = x\cdot y$.
   Sprendimas. Tegu $(x; y)$, $x, y \in Z$, yra ieškomoji skaičių pora. Aišku, kad $x \ne 1, y \ne 1$. Todėl $y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Iš šios išraiškos matome, kad skaičius y yra sveikasis tik dviem atvejais: $x = 0$ ir $x = 2$. Vadinasi, galimos tik dvi skaičių poros, tenkinančios uždavinio sąlygą - $(0; 0)$ ir $(2; 2)$.
   Ats. $(0; 0), (2; 2)$.

9. Vienas mokinys dviejų triženklių skaičių sandaugą $a \cdot b$ padalijo iš penkiaženklio skaičiaus *c*, o kitas mokinys, nepastebėjęs tarp tų triženklių skaičių daugybos ženklo, šešiaženklį skaičių padalijo iš to paties penkiaženklio skaičiaus *c*. Raskite triženklius skaičius *a* ir *b* bei penkiaženklį skaičių *c*, jeigu antrojo mokinio gautas dalmuo yra 3 kartus didesnis negu pirmojo mokinio gautas dalmuo.

Sprendimas. $\frac{\overline{ab}}{c} = 3\frac{a \cdot b}{c} \Rightarrow \frac{1000a + b}{c} = 3\frac{a \cdot b}{c} \Rightarrow 1000a + b = 3ab \Rightarrow 1000 + \frac{b}{a} = 3b$.

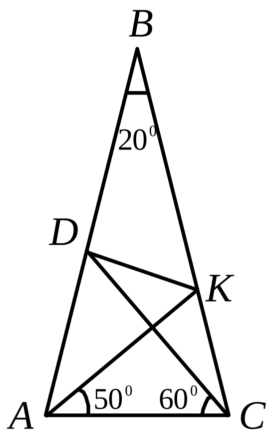
Pažymėkime $\frac{b}{a} = k,\ 1 \le k \le 9$ (b – vienženklis skaičius). Kadangi skaičius $(1000 + k)$ turi dalytis iš 3, tai gali būti tik $k = 2$, $k = 5$ arba $k = 8$. Taigi užtenka nagrinėti tik atvejus $b = 2a, b = 5a, b = 8a$.

Jeigu $b = 2a$, gauname $1002a = 6a^2 \Rightarrow a = 167$. Tuomet $b = 334$. Kadangi 167 – pirminis skaičius, tai *c* gali būti tik 167^2 arba $167^2 \cdot 2$.

Jeigu $b = 5a$, tai $1006a = 15a^2 \Rightarrow$ tokios *a* reikšmės nėra.

Jeigu $b = 8a$, tai $1009a = 24a^2 \Rightarrow$ tokios *a* reikšmės nėra.

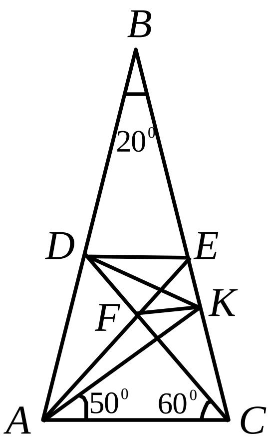
Ats. $a = 167,\quad b = 334,\quad c_1 = 167^2,\quad c_2 = 167^2 \cdot 2$.

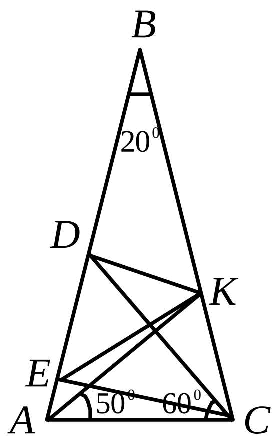


10. Lygiašonio trikampio *ABC* viršūnės kampas *B* lygus 20^0 (žr. pav.). Šoninėse kraštinėse atidėti taškai *D* ir *K*. Be to, kampas *DCA* lygus 60^0, o kampas *KAC* lygus 50^0. Apskaičiuokite kampą *CDK*.

Sprendimas. I *būdas*. Pažymėkime $AC = a$. Kadangi $\angle ACK = 80^0, \angle KAC = 50^0$, tai $\angle AKC = 50^0$ ir $AC = KC = a$. Išveskime atkarpą *DE*, lygiagrečią *AC* (žr. pav.), tašką *E* sujunkime su tašku *A*, gautąjį susikirtimo tašką *F* sujunkime su tašku *K*. Trikampiai *AFC* ir *DEF* yra lygiakraščiai, todėl $FC = a$, $DF = FE = DE$.

Kadangi $\angle AFC = 60^0$ ir $\angle CFK = 80^0$ (trikampis *FKC* - lygiašonis), tai $\angle EFK = 40^0 = \angle AEC$. Todėl $FK = EK$. Iš čia -trikampiai *DFK* ir *DEK* panašūs. *DK* – kampo *FDE* pusiaukampinė, todėl $\angle CDK = 30^0$.





II *būdas*. Nubrėžkime 20^0 kampą *ECA*. (žr. kitą pav.) ir sujunkime taškus *E* ir *K*. Apskaičiavę kampų *AEC*, *AKC* ir *ECK* dydžius, darome išvadą, kad $AC = EC = KC = EK = a$.

Kadangi $\angle ADC = 40^0, \angle ECD = 40^0$, tai $EC = ED = a$.

Lygiašoniame trikampyje *DEK* ($DE = EK = a$) $\angle DEK = 180^0 - (\angle KEC + AEC) = 40^0$. Vadinasi, $\angle EDK = 70^0$. Tuomet $\angle CDK = 70^0 - 40^0 = 30^0$.

Ats. $\angle CDK = 30^0$