SEPTYNIOLIKTOJI RUDENINĖ KOMANDINĖ IR SEPTYNIOLIKTOJI RUDENINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADOS PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2016-10-18

Sprendimai

Parengė Romualdas Kašuba

Individualioji olimpiada

1. Žr. 1-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
2. Žr. 4-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
3. Žr. 8-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
4. Žr. 5-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.
5. Žr. 2-ojo komadinės olimpiados uždavinio sprendimą.

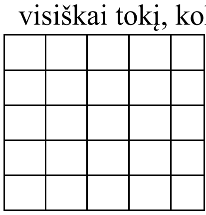
Komandinė olimpiada

1. Du patyrę Raseinių penktokai sykį susiginčijo, ar galėtų kas surasti tokius du triženklius skaičius, kurių suma dalytųsi (net) iš 498, o jų dalmuo, kuris yra sveikasis skaičius, dalytųsi (dar) ir iš 5. Atsakyme užrašykite didesniojo skaičiaus skaitmenų sumą.

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) Teisingas atsakymas yra kitoks

Vietoje sprendimo.
Jeigu a yra mažesnysis, o b – didesnysis iš paieškomų skaičių, tai tada galioja sąlygos $100 \leq a < b < 1000$, yra teisinga ir tai, kad $a + b = 498k$ bei $b = 5a$ (nes $b < 10a$). Iš čia išplaukia, jog $6a = 498k$, $a = 83k$, vadinasi, $b = 415k$. Kadangi pagal sąlygą ir a, ir b yra triženkliai skaičiai, todėl iš vienos pusės turi būti išpildyta sąlyga, kad $k \geq 2$, o iš kitos pusės turi būti $k \leq 2$. Vadinasi, $k = 2$, o tada $a = 166$ bei $b = 830$. Todėl didesniojo skaičiaus, kuriuo ir yra 830, skaitmenų suma yra $8 + 3 + 0 = 11$ ir todėl renkamės atsakymą **B**.

2. Sąsiuvinyje, suliniuotame langeliais, vienas Kryžkalnio vaikas, vardu Gabrielius, nusibrėžė 5×5 kvadratą, visiškai tokį, koks čia yra pavaizduotas apačioje:



Gabrieliui kažkodėl ėmė atrodyti, kad šį kvadratą yra tikrai įmanoma – karpant įprastiniu būdu pagal langelių linijas – padalinti į 7 stačiakampius, kurie dar būtų visi skirtingi (stačiakampiai 4×5 ir 5×4 laikomi vienodais). Negi tai tikrai įmanoma ir Gabrieliui gali pasisekti tai padaryti? Parodykite mums, kaip Gabrielius kerpa. Kad atsakymas būtų visai trumpas, jame nurodykite paties didžiausio panaudoto stačiakampio plotą. Tas didžiausias plotas yra lygus:

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Vietoj atsakymo, sprendimo ir kitų galimų euristinių komentarų bei minties „parisnojimų“:
Iš karto pateikiame keletą galimų atsakymų, kuriuose vienodi skaitmenys kvadrato viduje rodo priklausymą vienam ir tam pačiam karpinio stačiakampiui.

1	3	5	6	6
1	3	5	6	6
1	3	5	7	7
1	4	5	7	7
2	4	5	7	7

1	3	3	6	6
1	3	3	6	6
1	3	3	7	7
1	4	5	5	5
2	2	2	2	2

1	3	5	5	5
1	3	5	5	5
1	3	6	7	7
1	4	4	7	7
2	2	2	2	2

Pastebėjimai. Ne taip sunku „parašinėjus“ įsitikinti, kad jeigu kvadratą 5×5 sukarpome į 7 skirtingus stačiakampiukus su sveikais kraštinių ilgiais, tai tokiais stačiakampiukais gali būti tiktai stačiakampiukai

$$1 \times 1,\ 1 \times 2,\ 1 \times 3,\ 1 \times 4,\ 2 \times 2,\ 1 \times 5 \text{ ir } 2 \times 3.$$

Iš tikrųjų, karpinio stačiakampiukai, tai tam tikri stačiakampiai $m \times n$, kur natūralieji skaičiai m ir n tenkina sąlygas $1 \le m, n \le 5$. Jeigu visus tokius stačiakampiukus $m \times n$ ($m \le n$) surikiuotume didėjančia (nemažėjančia) ploto didumo eile, tai pirmieji septyni taip tik ir duotų trimis eilutėmis aukščiau „išrikiuotą“ seką, o po jų einančiųjų stačiakampiukų plotai jau „prašoktų“ 6. Bet mūsų dabar jau keturiomis eilutėmis aukščiau išrikiuotos sekos plotų suma yra $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 = 25$, o tai jau lygu visam pradinio 5×5 kvadrato plotui. Todėl bet kokių kitokių septynių skirtingų stačiakampiukų su sveikomis kraštinėmis, kurių ilgiai neviršija 5 ir kurių nors vienas skiriasi nuo mūsų stačiakampių septyneto, plotų suma bus jau didesnė kaip 25.

Suradus, kokie turi būti dėstinio stačiakampiukai, toliau visa kita yra jau visa i paprasta. Labai įdomu yra tai, kad pasirodo, jog paėmus pradinį kvadratą, galima bet kurioje jo vietoje bet kaip iškirpti bet kurį mūsų 7-to stačiakampiuką, o jau po to baigti kirpti (arba, kaip žmonės anksčiau kartais kiek netaisyklingai sakydavo „pri(da)kirpti“) likusius stačiakampiukus.☺

Kadangi paties didžiausio ploto karpinio stačiakampiuko plotas yra „du-kart-trys“, arba 6, tai „šiuom“ sykiu vienintelį galimą teisingą atsakymą ženklina raidė A.

Atsakymas (A)

3. Triženklis skaičius prasideda 4-tu. Kai Tytuvėnų gabuolis Dovydas tą ketvertą perkėlė į skaičiaus galą, tai suolo kaimynas Pranas pasižiūrėjęs, kas išeina, nustebo pastebėjęs, kad naujasis Dovydo skaičius sudarė lygiai tris ketvirtadalius pradinio skaičiaus. Kokį skaičių buvo pradžioje užrašęs Tytuvėnų gabuolis Dovydas? Atsakyme, kad būtų paslaptingiau, užrašykite abiejų pirmųjų Dovydo jau perstatyto naujojo skaičiaus (šimtų ir dešimčių) skaitmenų sumą. Ta naujojo skaičiaus pirmųjų dviejų skaitmenų suma iš tikrųjų yra lygi

(A) 9 (B) 11 (C) 6 (D) 5 (E) 2

Vietoje sprendimo

Jei pradinio triženklio skaičiaus skaitmenys yra 4, b ir c, tai jis pats yra $400 + 10b + c$, o tada perkėlę minėtą 4-tą į skaičiaus galą gauname triženklį skaičių $100a + 10b + 4$. Kadangi naujasis skaičius sudaro lygiai tris ketvirtadalius pradinio skaičiaus, tai turi galioti lygybė $4(100b + 10c + 4) = 3(400 + 10b + c)$. Iš čia turime, kad $370b + 37c = 1184$. Suprastinus iš 37 būtų $10b + c = 32$, todėl pradinis skaičius $400 + 10b + c$ yra 432, o nukėlę 4 į skaičiaus galą gautume skaičių 324, kurio dviejų skaitmenų suma yra 3+2 = 5, todėl aišku, kad teisingą atsakymą žymi raidė **D.**

4. Apie natūralųjį skaičių A visiems išsilavinusiems vadžgiriečiams kartą buvo pranešta, kad iš trijų apie jį pasakytų dalykų kažkurie du yra teisingi, o tas (likęs) trečias – ne. Tie trys pasakytieji dalykai yra tokie**:**
(P) $A + 51$ yra tikslusis kvadratas;
(Q) paskutinysis skaičiaus A skaitmuo yra 1;
(R) $A – 38$ yra tikslusis kvadratas.
Raskite tą skaičių A, o atsakyme, kad būtų dar paslaptingiau, nurodykite to skaičiaus skaitmenų sumą. Toji skaitmenų suma yra

(A) 21 (D) 24 (C) 33 (D) 22 (E) Teisingas atsakymas yra kitoks

Vietoje sprendimo
Jeigu Q būtų teisingas faktas apie skaičių A, tai yra jeigu paskutinysis skaičius A skaitmuo tikrai būtų 1, tai skaičiaus $A + 51$ paskutinis skaitmuo būtų 2, o skaičiaus $A – 38$ paskutinysis skaitmuo būtų 3. Tačiau tada abu tie skaičiai turėtų būti kvadratai, o taip nėra, kadangi kvadratai nei 2, nei 3 baigtis negali. Jei Q būtų teisingas faktas, tai du likę faktai būtų neteisingi, o taip negali būti. Vadinasi, Q negali būti teisingas, todėl teisingi tada privalo būti abu likę faktai P ir R.
Tada $A + 51 = n^2$, $A – 38 = m^2$ ir $n^2 – m^2 = 89$. Tada $n^2 – m^2 = (n – m)(n + m) = 89$. Kadangi n yra didesnis už m, o skaičius 89 yra pirminis, tai vienintelė galimybė, kad taip būtų, yra galimybė, kad natūralusis skaičius $n – m$ būtų lygus 1, o natūralusis skaičius $n + m$ būtų 89. Sudėję šias lygybes gautume, kad $2n$ yra 90, vadinasi, n yra 45, o pats skaičius A yra lygus $45^2 – 51 = 1974$. Šis skaičius, pastebėkime, tikrai netenkina sąlygos Q, kadangi jo paskutinis skaitmuo yra 4, o ne 1, o jo skaitmenų suma yra $1 + 9 + 7 + 4 = 21$, todėl teisingą atsakymą ženklina raidė **A**.

5. Kuris iš penkių žemiau pateikiamų reiškinių yra lygus reiškiniui $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$?
(A) $3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)$ (B) $3x(y+z)^2+3y(x+z)^2+3z(x+y)^2$
(C) $3(x+y)(x+z)(y+z)$ (D) $3x(y^2+z^2)+3y(x^2+z^2)+3z(x^2+y^2)$
(E) $3xy(1-z)+3xz(1-y)+3yz(1-x)$

Vietoje sprendimo.
Pakanka tvarkingai sudauginti ir tada gausime, kad mūsų suskaičiuotame reiškinyje bus narys $6xyz$, kuris iš atsakymais „peršamų“ reiškinių tepasirodo tiktai reiškinyje C, todėl C ir yra įtariamas kaip geras atsakymas. Patikrinus pasirodo, kad taip tikrai ir yra, todėl teisingą atsakymą, kaip tuojau ir patirsime, tikrai ir ženklina raidė **C**.
Tikrai, galima sudauginus „kiekvieną iš kiekvieno“ išraiškoje

$$(x+y+z)^3 = (x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z)$$

gauti reiškinį $x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+6xyz.$
Vadinasi,

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=$$
$$=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+6xyz-x^3-y^3-z^3=$$
$$=3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+6xyz$$

Antra vertus, atsakyme C siūlomas reiškinys, kuris yra

$$3(x+y)(y+z)(z+x)=3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz)=$$
$$3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+6xyz,$$
tikrai yra lygus tam reiškiniui, kurį ką tik dar aukščiau jau buvome gavę.
Pastebėkime, kad daugiau jokiame iš atsakymais „peršamų“ reiškinių išskleidus $6xyz$ nebepasirodo. Tikrai, atsakyme A jokio nario su xyz apskritai nėra, jo taip pat nėra ir atsakyme D, o išskleidus reiškinį B gautume net $18xyz$. Galiausiai atsakyme E būtų $-9xyz$, bet tai ir vėl ne tai, ko mums reikėtų☺
Atsakymas (C).

6. Matematikų komanda dalyvauja pliažo aritmetikos varžytuvėse, kur už pergalę skiriami 3 taškai, už lygiąsias duodamas 1 taškas, o už pralaimėjimą taškų, suprantama, visai neduodama. Šimkaičių pliažo aritmetikos komanda po pirmųjų 13 rungtynių sukaupė 29 taškus ir pralaimėjo tiek pat rungtynių kaip ir sužaidė lygiomis. Kiek rungtynių tuo metu buvo laimėjusi Šimkaičių pliažo aritmetikos komanda?
(A) 6 (B) 4 (C) 10 (D) 8 (E) 9

Vietoj sprendimo
Jeigu komanda pralaimėjo tiek pat kartų, kaip ir sužaidė lygiosiomis, o žaidė iš viso 13 rungtynių, tai ji iškovojo nelyginį pergalių skaičių. Visų trylikos rungtynių, kaip sekančio pagal didumą nelyginio, kuris yra 11, rungtynių ji laimėti negalėjo, nes būtų surinkusi „per daug“ taškų, nes „triskart vienuolika“ būtų net trisdešimt trys. Tinka sekantis pagal mažumą nelyginis skaičius 9. Tikrai, už devynias pergales „duos“ 27 taškus ir už dvejas lygiąsias dar 2 taškus pridės ir, žinoma, dviejų pralaimėjimų nepamirš. Pastebėkime, kad 7 pergalių jau per maža, kad per 13 rungtynių sukauptume 29 taškus.
Vadinasi, Šimkaičių komanda pliažo matematikos varžytuvėse iškovojo net 9 pergales, todėl uždavinio teisingą atsakymą ženklina raidė **E**.

7. Triženklis skaičius *abc* yra pirminis skaičius. Kiek pirminių daliklių turi 6-ženklis skaičius *abcabc*? Primename, kad skaičius yra pirminis, jeigu jis tesidalija tik iš 1 ir pats iš savęs.
(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 6 (E) 8
Vietoj sprendimo
Pakanka „įsibėgėjant“ pastebėti, kad skaičius *aa* dalijasi iš 11, nes $aa = 11a$. Toliau, skaičius *abab* dalijasi iš 101, nes $abab = ab00 + ab = 100ab + ab = 101ab$. Visiškai taip pat $abcabc = abc000 + abc = 1000abc + abc = 1001abc$.
Kadangi pagal sąlygą *abc* yra pirminis skaičius, tai gana išskaidyti 1001, kuris, kaip žinia, yra „septynis kartus po trylika kart vienuolika“. Kitaip tariant, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ir todėl $abcabc = abc \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Skaičius *abcabc* turi 4 pirminius daliklius, kuriais yra pirminiai skaičiai 7, 11, 13 ir *abc*. Todėl teisingo atsakymo raidė šį kartą yra **A.**
Atsakymas (A)

8. Prie Tytuvėnų vienuolyno susibūrusi jaunimėlio grupė „Žinom, kam triūsiam krutam“, kurioje nenuleisdami rankų triūsė 17 stropuolių, padarė lyginį skaičių Kalėdinių dovanėlių aplinkinių vietovių seneliams bei stokojantiems. Pastabioji ir nenuilstančioji visų šių gerųjų reikalų iniciatorė Magdalena Raseiniškė iš karto visiems atvirai pasakė, kad kiekvieną dovanėlę kiekvienas vaikas tikrai darė vienas pats – nuo sumanymo iki pat įpakavimo. Be to, ji dar neklystamai nustatė, kad, kaip bežiūrėsi, bet kuri 5 vaikų grupelė tikrai nepadarė daugiau negu 25 dovanėles, o bet kuri 3 vaikų grupelė – mažiau kaip 14 dovanėlių. Kiek iš viso dovanėlių sukaupė ši 17 geradarių grupė „Žinom, kam triūsiam krutam“? Atsakyme, kad būtų dar trumpiau, užrašykite tik padarytųjų dovanėlių skaičiaus vienetų skaitmenį. Tas padarytų dovanėlių skaičiaus vienetų skaitmuo yra:
(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2 (E) 0

Vietoj sprendimo

Nagrinėkime du stropuolius, padariusius po mažiausiai dovanėlių. Pirmiausiai tarkime, kad jie abu kartu tepadarė daugių daugiausiai 8 dovanėles. Kadangi bet kurie trys kartu padaro ne mažiau kaip 14, todėl visi likę 15 padarė bent po 14 – 8 = 6 dovanėles, vadinasi, iš jų bet kurie 5 padaro bent 30, ko negali būti pagal sąlygą.

Vadinasi, du mažiausiai padarę turi padaryti kartu bent 9 dovanėles. Tada vienas iš jų, o kartu ir likę 15 padarė bent po 5 dovanėles. Jei bent vienas padarė 6 dovanėles ar daugiau, tai yra 5 vaikai, padarę net 5 + 5 + 5 + 5 + 6 = 26 dovanėles. Todėl 16 iš 17 vaikų padarė lygiai po 5 dovanėles, o likęs vaikas jų atidavė bent 14 – 5 – 5 = 4, bet ne daugiau nei 25 – 5 – 5 – 5 – 5 = 5. Iš dviejų galimų skaičių 17 · 5 = 85 ir 16 · 5 + 4 = 84 renkamės lyginį 84.

Todėl pasirenkamojo atsakymo raidė šį kartą yra **C**.

Atsakymas (C).

9. Į natūralųjį skaičių 68 skaičius 13 telpa 5 kartus ir dar lieka 3 vienetų didumo liekana. Kitaip tariant, 68 = 5 · 13 + 3. Šiuo atveju moksle yra visada pasakoma ir dar pakartojama, kad skaičiaus 68 dalybos iš 13 (nepilnasis) dalmuo yra 5, o liekana yra 3. Vieną tokį natūralųjį skaičių N Raseinių centre padalijus iš 7 (nepilnojo) dalmens ir (nenulinės) liekanos suma pasirodė esanti lygi 10. Tą patį skaičių N jau kitą dieną, dabar jau Ariogalos priemiesčiuose padalijus iš 11, (nepilnojo) dalmens ir (nenulinės) liekanos suma vėl išėjo lygi 10. Visi tuo labai stebėjosi. Ar tikrai taip gali būti? Kam yra lygus skaičius N? Atsakyme nurodykite to paslaptingojo skaičiaus N visų skaitmenų sumą. Toji paslaptingojo skaičiaus visų skaitmenų suma yra:

(A) 14 (B) 12 (C) 8 (D) 6 (E) 4

Vietoj sprendimo:

Tegu r ir s yra tos (nenulinės) liekanos, gaunamos Raseiniuose ir Ariogaloje. Tada, sutinkamai su sąlyga, turime du dėstinius. Vienas, tas Raseinių dėstinys, yra $N = 7 \cdot (10 - r) + r$, kur $1 \leq r \leq 6$, o kitas, tas ariogalinis, yra toks: $N = 11 \cdot (10 - s) + s$, kur $1 \leq s \leq 10$. Iš čia išeina, kad $7 \cdot (10 - r) + r = 11 \cdot (10 - s) + s$, arba, kas yra tas pats, matome, kad $5s - 3r = 20$, kas perrašytina ir kaip $3r = 5 \cdot (s - 4)$. Kadangi 3 ir 5 neabejotinai yra tarpusavyje pirminiai (neturi bendrų už vienetą didesnių daliklių), tai iš pačios paskutiniosios lygybės išeina, kad r dalijasi iš 5, o kadangi $1 \leq r \leq 6$, tai tada $r = 5$. Todėl $N = 7 \cdot (10 - 5) + 5 = 40$. Lengva patikrinti, kad 40 tikrai yra skaičius, kuris tikrai išlaikytų „laiko išbandymus“ ir Raseiniuose, ir Ariogaloje.

Kadangi skaičiaus 40 skaitmenų suma yra 4 + 0, arba 4, todėl teisingo atsakymo raidė yra **E**.

Atsakymas (E)

10. Tytuvėnų profiliuoto matematinio darželio „Vienuolyno rimtis ir išmintis“ biblioteka, rėmėjo Aritmūno remiama, įsigijo lygiai 100 leidinių: aritmetikos pratybų sąsiuvinių, algebros vadovėlių bei geometrijos enciklopedijų, kainavusių atitinkamai po 1, po 10 ir po 50 eurų. Už tuos visus 100 leidinių buvo sumokėta lygiai 500 eurų. Kiek algebros vadovėlių buvo nupirkta?

(A) 42 (B) 39 (C) 32 (D) 50 (E) 10

Vietoj sprendimo:

Jeigu x – aritmetikos pratybų sąsiuvinių, y – algebros vadovėlių, o z – geometrijos enciklopedijų skaičius, tai iš išvardintų uždavinio sąlygų gauname, kad $x + y + z = 100$, o $x + 10y + 50z = 500$. Atėmę pirmąją lygtį iš antrosios turėtume, kad $9y + 49z = 400$. Tai galima perrašyti kaip $9y + 45z - 396 = 4 - 4z$. Kairėje pusėje „viskas“ dalijasi iš 9, todėl iš 9 turi „viskas“ dalintis ir dešinėje pusėje. Tačiau z tegali būti lygus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 arba 9 (nes $49z < 400$). Tada reiškinys $4 - 4z$ būtų lygus atitinkamai 4, 0, – 4, – 8, – 12, – 16, – 20, – 28 arba – 32. Iš jų tik 0 dalijasi be liekanos iš 9, todėl z yra 1. Tada y, kurio mes ir ieškome, yra 39.

Taigi buvo nupirkti 39 algebros vadovėliai ir todėl teisingas atsakymas yra **B**.

Atsakymas (B)