KETURIOLIKTOJI RUDENINĖ KOMANDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2013-10-25

1. Šimkaičiuose jau nuo Vytauto Didžiojo laikų būdavo sakoma, kad skaičius A (visai nesvarbu, ar jis teigiamas, ar neigiamas, ar nulis) *yra šio to vertas*, jeigu skaičius $A + 7$ dalijasi be liekanos iš skaičiaus $A + 3$.

Sakysime, skaičius 1 Šimkaičiuose tikrai *yra šio to vertas*, nes 1 + 7 = 8 dalijasi be liekanos iš 1 + 3 = 4, nes niekas nuo Veliuonos iki Velingtono neabejoja, kad 8 : 4 = 2.

Kiek iš viso yra tokių sveikųjų skaičių, kurie Šimkaičiuose yra laikomi šio to vertais?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 6

SPRENDIMAS

Kadangi trupmena $\frac{x+7}{x+3}$ turi būti sveikasis skaičius, o $\frac{x+7}{x+3} = 1 + \frac{4}{x+3}$, tai trupmena $\frac{x+7}{x+3}$ bus sveikasis skaičius išimtinai tiktai tada, kai trupmena $\frac{4}{x+3}$ bus sveikasis skaičius.

O trupmena $\frac{4}{x+3}$ bus sveikasis skaičius, kai jos vardiklis x + 3 bus lygus vienam kuriam skaičiaus 4 dalikliui, kurių iš viso yra 6 ir kurie, imant juos iš eilės – nuo mažiausiojo iki didžiausiojo, yra -4, -2, -1, 1, 2 ir 4.

Taigi x + 3 yra lygus -4, -2, -1, 1, 2 ir 4, arba pats x yra -7, -5, -4, -2, -1 ir 1.

Atsakymas:

Veliuonoje yra 6 šio to verti skaičiai -7, -5, -4, -2, -1 ir 1, todėl teisingas atsakymas yra E.

Atsakymas: E.

2. Istorikai liudija, kad Tytuvėnų vienuolyno mokykloje mokyti vienuoliai skyriui baigiantis visiems, kas troško mokytis toliau, pateikdavo spręsti tokį skaičių dėlionės po tris uždavinį. Žemiau pateikiama paslaptinga to uždavinio sąlyga:

Kažkur toli, labai toli, bet, sako, dar Žemaičių vyskupystės žemėse, akmenyje yra iškalti tokie 6 sveikieji skaičiai (sako, nebūtinai visi skirtingi), iš kurių mes renkamės visais galimais būdais kiekvieną kartą vis kitaip imdami po tris skaičius. Taip dėliojant 10 kartų gaunama 16-kai lygi suma ir likusius 10 kartų gaunama suma yra 18.

Vienuoliai iš karto palikdavo mokytis antrus metus visus tuos, kurie galėdavo per valandą nustatyti, kam lygus pats mažiausias iš tų (kaip sako, nebūtinai skirtingų) sveikųjų skaičių.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

SPRENDIMAS

Turėdami 6 skaičius, turime $\binom{6}{3} = \frac{6(6-1)(6-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 20$ galimybių sudėti juos visais galimais būdais po tris skaičius.

Pasakyta, kad 10 sudėčių po 3 skaičius duoda 16 ir likę 10 būdų duoda 18, todėl iš viso visi 20 būdų per visas 20 sumų duoda $10\cdot 16 + 10\cdot 18 = 340$-iai lygią visų galimų sumų po 3 skaičius “sumų sumą“.

Kadangi kiekvienas į sumą imamas 10 kartų (sakysime, pirmasis imamas su antru ir trečiu, su antru ir ketvirtu, su antru ir penktu, su antru ir šeštu, su trečiu ir ketvirtu, su trečiu ir penktu, su trečiu ir šeštu, su ketvirtu ir penktu, su ketvirtu ir šeštu, bei su penktu ir šeštu), be to, $\binom{5}{2} = \frac{5(5-1)}{1\cdot 2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$), tai visų 6 skaičių suma yra lygi 340 : 10 = 34.

Todėl iš tų 6 skaičių, duodančių tik 2 skirtingas sumas, dedant juos visais galimais būdais po 3, tik 2 skaičiai gali būti skirtingi. Nes jeigu būtų tik lygiai trys skirtingi skaičiai a, b ir c, tai kurio nors, sakysime, a, būtų 2 egzemplioriai ir tada atsirastų jau 3 skirtingos sumos $a + a + b$, $a + a + c$ *ir* $a + b + c$. Panašiai elgtumės, jeigu jų būtų daugiau.

Vadinasi, tėra tik 2 skirtingi skaičiai a ir b. Tada būtinai vieno kurio yra vienintelis „egzempliorius“, o kito – likę 5 „egzemplioriai“ (nes jei būtų kiekvienos rūšies bent 2, tai tada vienos, kurios rūšies, sakysime a, rastųsi bent 3 egzemplioriai ir tada 3 sumos po 3 skaičius $a + a + a$, $a + a + b$ ir $a + b + b$ būtų skirtingos. Vadinasi, vienos kurios rūšies yra vienintelis egzempliorius, o kitos – likę 5. Taigi mūsų atveju būtų rinkiniai

a, a, a, a, a ir b arba a, b, b, b, b ir b (čia $a < b$). Pirmuoju atveju $a + a + a = 16$ ir a nėra sveikasis skaičius. Kitu atveju $b + b + b = 18$ ir $b = 6$, tada $a + b + b = 16$ ir $a = 4$ yra mūsų uždavinių atsakymas ir teisingas yra atsakymas D.

Atsakymas: Pats mažiausias iš tų sveikųjų skaičių lygus 4 arba D.

3. Gyveno kartą Ariogaloje jaunutis darbštuolis vardu Aristidas. Jis buvo garsus tuo, kad sekmadieniais būdavo ir labai tvarkingas, ir labai išmintingas. Jis dar nuo kūdikystės buvo labai prisirišęs prie palindrominių skaičių. (Palindrominiai skaičiai yra skaičiai, kurie, iš kurio galo tu juos beskaitytum, vis tiek tiek pat priskaičiuosi. Būtent tokie buvo ir pirmieji du Aristido šiame pasaulyje išvystieji skaičiai 101 ir 3773.)

Praeitą vasarą Aristidas, dabar jau trečios klasės gimnazistas, išrinko visus penkiaženklius palindrominius skaičius ir tvarkingai susirašė juos ant didžiulio popieriaus lapo didėjančia tvarka – nuo paties mažiausio iki didžiausio.

Linksmasis kaimynas Stepas nugirdęs apie tai sakė Aristidui, kad jis ir be jokio sąrašo per 12 sekundžių tikrai „sugeneruotų“, koks skaičius yra 13-tas Aristido sudarytame nepriekaištingai tiksliame sąraše. Tas 13-tasis palindrominis skaičius teisingame Aristido palindromų sąraše yra:

(A) 11111 (B) 11211 (C) 12221 (D) 12321 (E) 12421

SPRENDIMAS.

Pats mažiausias 5-ženklis Aristido sąrašo palindromas, suprantama, yra 10 001.
Toliau eitų 10101, 10201, 10301, 10401, 10501, 10601, 10701, 10801, 10901.

Parašėme jau 10 Aristido sąrašo palindromus, liko parašyti 11-tą, 12-tą ir ypač 13-tą, Jie yra: 11-tasis palindromas 11011, 12-tasis palindromas yra 11111 ir pagaliau 13-tasis yra 11211.

Atsakymas yra 11211 ir todėl renkamės atsakymą B.

4. Legendoje apie Eržvilko mergelę ir apie nežinia iš kur Eržvilkan atsivilkusį vilką minėtosios mergelės intelektinė šlovė yra siejama su jos gebėjimu išspręsti tokį uždavinį, kurio sąlyga buvo surašyta Balbieriškio Moderniosios aritmetikos centro Subtiliųjų menų skyriuje. Štai toji gerokai nenuobodi uždavinio sąlyga:

Skaičių virtinė prasideda trimis skaičiais 27, 1, 2012. Seka pasižymi tokia savybe, kad pirmojo, antrojo ir trečiojo jos narių suma yra 2040. Toliau yra žinoma, kad jos antrojo, trečiojo ir ketvirtojo narių suma yra 2039, trečiojo, ketvirtojo ir penktojo narių suma yra

2038 ir taip toliau. Apibendrinčiau sakant, tos virtinės k-tojo, (k+1)-ojo ir (k+2)-tojo narių suma yra 2041 – k. Koks skaičius yra parašytas 2013-oje tos virtinės vietoje?

(A) – 670 (B) – 669 (C) 670 (D) 1341 (E) 1342

SPRENDIMAS

Parašome keletą pirmųjų virtinės narių

27, 1, 2012, 26, 0, 2011, 25, -1, 2010, 24, -2, 2009, 23, -3, 2008, 22, -4, 2007

ir pastebime, kad kas trečias narys po 1 sumažėja.

Kadangi 2013 dalijasi iš trijų tai jis bus (2013 – 3) : 3 = 670 vienetų mažesnis už 3-ąjį virtinė narį, kuris yra lygus 2012, todėl jis bus lygus

$$2012 – 670 = 1342$$

ir todėl renkamės atsakymą E.

Atsakymas: E.

5. Vienoje Raseinių šeimoje buvo keli broliai, kurie visi buvo gimę (iš karto ir nepatikėtum) vieną ir tą pačią (skirtingų) metų dieną. Visų brolių amžiaus vidurkis buvo 20 metų. Broliai savo gimtadienį švęsdavo per ištisą dieną trunkančią šventę, susidedančią iš šventinių pusryčių, šventinių pietų ir šventinės vakarienės.

Per šventinius pusryčius nebuvo tik dar neatsikėlusio jauniausiojo brolio, ir dėl to jų visų amžiaus vidurkis tuojau šoktelėjo iki 22 metų.

Per pietus, kai jaunėlis jau buvo atėjęs, bet vyriausias brolis išvykęs į šventinį priėmimą Raseinių savivaldybėje, visų likusių pietaujančių brolių amžiaus vidurkis sudarė vos 13 metų.

Per vakarienę, kai vyriausias brolis dar nebuvo pargrįžęs iš savivaldybės, o jauniausiojo brolio dėl koncerto muzikos mokykloje vėl nebebuvo, visų prie stalo esančių brolių amžiaus vidurkis buvo jau 14 metų.

Kiek brolių yra toje įspūdingoje Raseinių šeimoje?

(A)4 (B)5 (C)6 (D)7 (E)8

SPRENDIMAS.

Sakykime, kad toje šeimoje yra n brolių, o jų amžiai s1, s2,... s(n-1) ir s(n) yra išdėstyti didėjančia eile. Tada 1 brolis yra jauniausias, o n-tasis brolis – vyriausias.

Pagal sąlygą

$$\frac{s1+s2+...+s(n-1)+s(n)}{n}=20,$$

$$\frac{s2+...+s(n-1)+s(n)}{n-1}=22,$$

$$\frac{s1+s2+...+s(n-1)}{n-1}=13,$$

$$\frac{s2+...+s(n-1)}{n-2}=14.$$

Tada

$$s1+s2+...+s(n-1)+s(n)=20n,$$

$$s2 + ... + s(n-1) + s(n) = 22(n-1),$$
$$s1 + s2 + ... + s(n-1) = 13(n-1),$$
$$s2 + ... + s(n-1) = 14(n-2),$$

Dabar gana pastebėti, kad sudėjus abi kraštines lygybes gauname tą patį, kaip ir dėdami abi vidurines lygybes.

Todėl būtinai

$$20n + 14(n - 2) - 22(n - 1) - 13(n - 1) = 0.$$

Vadinasi,

$$20n + 14n - 22n - 13n = 28 - 22 - 13 = -7 = - n.$$

Todėl $n = 7$ ir todėl teisingas yra atsakymas D.

Atsakymas: D.

6. Šiluvos skautai turėjo nešti į trikampių taisos dirbtuves remontuoti 2 trikampius – vieną smailųjį ir kitą bukąjį. Pagal darbų saugos reikalavimus nešant būtina išardyti trikampius į kraštines, o prie ardant – dar ir išmatuoti visų kampų didumus. Skautai išmatavo tuos kampus ir jų didumus rūpestingai užrašė kiekvieną ant atskiro popieriaus lapelio. Nešant papūtė šiaurūs vėjai ir 2 iš tų 6 lapelių negrįžtamai nuskrido, o ant išlikusių 4 lapelių liko tokie kampai: 120º, 80º, 55º, 10º. Ar tik tiek, kiek čia pasakyta težinanodamas nagingasis Šiluvos trikampių monteris Apolinaras dar gali nustatyti, koks buvo pats mažiausias smailiojo trikampio kampas?

(A) 5º (B)10º (C) 45º (D)55º (E) To negalėtų nustatyti jokie monteriai

SPRENDIMAS

Suprantama, kad 120º smailiojo trikampio kampu būti negali, todėl sekantis pagal didumą sekantis „“nepamestas“ kampas 80º privalo būti smailiajame trikampyje, nes į bukąjį trikampį su vienu kampu jau lygiu 120º, jis „netilps“.

Todėl 80º laipsnių kampas yra smailiajame trikampyje ir tada 10º laipsnių išlikęs kampas turi būti bukajame trikampyje, nes jeigu jis būtų smailiajame trikampyje, tai tada jis būtų statusis, o yra ne taip.

Vadinasi, 10º kampas yra bukajame trikampyje, todėl trečiasis jo kampas tada būtų

$$180º - 120º - 10º = 50º$$

ir jis yra pamestasis kampas.

Todėl ketvirtasis išlikęs nepamestasis 55º kampas privalo būti smailiojo trikampio kampas, todėl trečiasis smailiojo trikampio kampas yra

$$180º - 80º - 55º = 45º$$

ir yra pats mažiausias to smailiojo trikampio kampas, todėl teisingas atsakymas yra 45º ir todėl renkamės atsakymą C.

Atsakymas: C.

7. Stasys iš Vadžgirio tepripažįsta savo draugais 1000 neviršijančius natūraliuosius skaičius ir iš tų skaičių nori prisirinkti kuo daugiau skirtingų skaičių, tenkinančių geležinę Stasio sąlygą: imant bet kuriuos 2 iš Stasio atrinktųjų skaičių vienas kuris turi dalytis be liekanos iš kito skaičiaus. Kiek daugiausiai skaičių gali būti tokioje aibėje?

(A)2 (B)7 (C)10 (D)100 (E) 499

SPRENDIMAS

Reikia pririnkti kuo didesnę 1000-ties neviršijančią skaičių virtinę. Nemažindami bendrumo, galime sakyti, kad pats mažiausias jos virtinės skaičius yra 1, nes jeigu 1 toje virtinėje dar nebūtų, tai prijungę jį gautume dar ilgesnę virtinę. Visus kitus tos virtinės skaičius keisdami dvejeto laipsniais gautume tokią pačią sąlygą tenkinančią, tiktai galbūt dar mažesnę virtinę. Todėl pati ilgiausioji tokių skaičių virtinė negali turėti daugiau narių kaip virtinė

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ir 512,

arba iš viso 10 narių ir todėl teisingas yra atsakymas C.

Atsakymas C.

8. Betygalos Stepas išsitekino medinį kubelį ir iš džiaugsmo, kad jis toks taisyklingas ir tvirtas, kiekvienoje iš 6 to kubelio sienelių dar paženklino dideliais juodais taškais kuriuos nors du tolimiausius tos sienelės kampus. Po to, pailsėjęs jis suskaičiavo ir susirašė, kiek juodų taškų sueina į kiekvieną iš 8 to tvirto ir taisyklingo kubelio viršūnių. Kokio 8 skaičių rinkinio jis negali gauti taip darydamas.

(A) 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 (B) 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3 (C) 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3
(D) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3 (E) 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3.

SPRENDIMAS

Atvejus A, C, D ir E gauti įmanoma. Įrodysime, kad atvejo B gauti neįmanoma.

Imkime bet kurias dvi priešingas kubelio sieneles. Jei turime tris trejetus, tai bent du iš jų turi būti vienoje iš tų sienelių. Dar daugiau, tie du trejetai turi būti nagrinėjamos sienelės taškais pažymėtose viršūnėse, taigi priešingose viršūnėse. Tose viršūnėse pažymėję po 3 taškus, atitinkamose sienelėse turėsime pažymėti dar 4 taškus (kad jose būtų pažymėtos priešingos viršūnės). Tada lieka viena paskutinė sienelė, kurioje taškus galima pažymėti dviem būdais. Taip gauname situacijas C ir E, bet ne B.

Vadinasi, atvejo B negalima gauti ir todėl renkamės atsakymą B.

Atsakymas: B.

9. Eilute surašyti 5 iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Pirmojo skaičiaus skaitmenų suma yra 52, o penktojo – 20. Raskite pačią mažiausiąją tokią 5-ių skaičių virtinę ir užrašykite, kiek 8-tų yra pačiame mažiausiame tos 5-ių skaičių virtinės skaičiuje.

(A)1 (B)2 (C)4 (D)3 (E) Tame mažiausiame skaičiuje skaitmens 8 apskritai nėra

SPRENDIMAS

Be rimto devynetų virsmo nuliais tokios 5 skaičių virtinės tikėtis negalima. Pasižiūrėjus, kad

pereinant nuo 9 prie 10 prarandami „8 skaitmenų sumos vienetai“,
pereinant nuo 99 prie 100 prarandama „17 skaitmenų sumos vienetų“,
pereinant nuo 999 prie 1000 prarandami „26 skaitmenų sumos vienetai“,
pereinant nuo 9999 prie 10000 prarandami „35 skaitmenų sumos vienetai“,

mūsų atveju vienoje vietoje turi būti 4 paskutinių devynetų virtimas 4 nuliais. Tada pavyzdį parinkti jau nebe sunku: užtenka, pavyzdžiui, pirmuoju skaičiumi imti skaičių besibaigiantį 9999 ir priekyje prirašyti patį mažiausią dviženklį skaičių, kurio skaitmenų suma yra 16. Tokių skaičių yra vos keli 79, 88 ir 97.

Iš jų pats mažiausias yra 79, bet jo imti pirma 9999 negalima, nes gautame skaičiuje

799 999

bus 5 devynetų virsmas 00000, o tai mums per daug.

Todėl imdami pagal didumą sekantį skaičių 88, gausime pirmąjį skaičių

889 999.

Visa virtinė tada bus

889 999, 890 000, 890 001, 890 002 ir 890 003.

Nesunku suvokti, kad tai yra pati mažiausia įmanoma virtinė, nes 4 devynetų virsmą reikia daryti iš karto. Darant kitaip pirmųjų dviejų skaitmenų suma bus dar didesnė, o tuo pačiu bus didesni ir patys skaičiai.

Todėl pats mažiausias įmanomas pirmasis pačios mažiausios virtinės skaičius yra

889 999,

Jame yra 2 aštuonetai, todėl teisingas yra atsakymas B.

Atsakymas B.

10. Palei tiesų kelią iš Tytuvėnų į Šiluvą gyvena penki šilo broliai Augustinas, Baltrus, Celestinas, Dionizas ir Eligijus, kurių namai stovi jų savininkų vardų abėcėline eile. Rūpestingasis Baltrus, kuris gyvena toliau nuo Šiluvos kaip Celestinas, sykį suskaičiavo visų atstumų nuo savo namo iki likusių 4 namų sumą ir gavo 20 km. Atstumų nuo savo namo iki visų kitų likusių 4 namų sumą suskaičiavo ir Celestinas, tik jis gavo 18 km. Koks atstumas nuo Baltraus iki Celestino namų skaičiuojant kilometrais?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 7 (E) 3

Sprendimas

Atstumą tarp Augustino ir Baltraus pažymėkime AB, tarp Baltraus ir Celestino – BC, tarp Celestino ir Dionizo – CD ir atstumą tarp Dionizo ir Eligijaus – DE.

Tada atstumų nuo Baltraus iki visų likusių jo kaimynų suma yra

$$AB + BC + (BC + CD) + (BC + CD + DE) =$$
$$AB + 3BC + 2CD + DE = 20$$

Panašiai atstumų nuo Celestino iki visų kitų keturių jo kaimynų suma yra

$$(AB + BC) + BC + CD + (CD + DE) =$$
$$AB + 2BC + 2CD + DE = 18.$$

Šių abiejų atstumų sumų skirtumas ir yra BC ir jis yra lygus 20 – 18 = 2.

Taigi atstumas BC tarp Baltraus ir Celestino yra 2 ir todėl teisingas atsakymas yra B, kurį ir renkamės.

Atsakymas: B.

KETURIOLIKTOJI RUDENINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2013-10-25

1. Šlovingosios Žemaičių Žemės aritmetinių reikalų patikėtinis grafas Var(a)navičius, vizituodamas Varnius, ištaikęs sekundėlę laiko mokslui, į vieną eilutę surašė keletą skirtingų natūraliųjų skaičių, neviršijančių 10. Varnių seminarijos dėstytojas Anupras Pliusas, pažvelgęs į juos su didžiu pasitenkinimu pasakė, kad kiekvienoje greta esančių tos eilutės skaičių poroje vienas kuris skaičius visada dalijasi be liekanos iš kito skaičiaus. Dėstytojas Anupras pliusas pasakė grafui, kad jis žino, kiek daugiausiai skaičių galėtų būti tokioje virtinėje. Kiek skaičių gali būti tokioje nekasdienėje skaičių virtinėje?

SPRENDIMAS

Jei surašyti visi 10 skaičių, tai skaičius 7 turi būti viename iš eilutės galų, o šalia jo - skaičius 1. Kiekvienas iš skaičių 5 ir 9 gali būti tik toliau greta 1 arba kitame eilutės gale, tad abi šios vietos užimtos skaičių 5 ir 9. Skaičiai 4, 6 ir 10 nėra nei eilutės galuose, nei šalia 1, todėl 4 yra tarp 8 ir 2, kai 6 yra tarp 3 ir 2, o 10 yra tarp 5 ir 2. Bet šalia 2 negali būti trijų skaičių, todėl daugiausiai galime surašyti 9 skaičius: 8, 4, 2, 6, 3, 9, 1, 5, 10.

Atsakymas. Galima parašyti 9 skaičius.

2. Šimkaičiuose jau nuo Vytauto Didžiojo laikų būdavo sakoma, kad skaičius A (visai nesvarbu, ar jis teigiamas, ar neigiamas, ar nulis) *yra šio to vertas*, jeigu skaičius $A + 7$ dalijasi be liekanos iš skaičiaus $A + 3$.
Sakysime, skaičius 1 Šimkaičiuose tikrai *yra šio to vertas*, nes 1 + 7 = 8 dalijasi be liekanos iš 1 + 3 = 4, nes niekas nuo Veliuonos iki Velingtono neabejoja, kad 8 : 4 = 2.
Kiek iš viso yra tokių sveikųjų skaičių, kurie Šimkaičiuose yra laikomi šio to vertais?
SPRENDIMAS

Kadangi trupmena $\frac{x+7}{x+3}$ turi būti sveikasis skaičius, o $\frac{x+7}{x+3} = 1 + \frac{4}{x+3}$, tai trupmena $\frac{x+7}{x+3}$ bus sveikasis skaičius išimtinai tiktai tada, kai trupmena $\frac{4}{x+3}$ bus sveikasis skaičius.

O trupmena $\frac{4}{x+3}$ bus sveikasis skaičius, kai jos vardiklis x + 3 bus lygus vienam kuriam skaičiaus 4 dalikliui, kurių iš viso yra 6 ir kurie, imant juos iš eilės – nuo mažiausiojo iki didžiausiojo, yra -4, -2, -1, 1, 2 ir 4.
Taigi x + 3 yra lygus -4, -2, -1, 1, 2 ir 4, arba pats x yra -7, -5, -4, -2, -1 ir 1.
Atsakymas:
Veliuonoje yra 6 šio to verti skaičiai -7, -5, -4, -2, -1 ir 1.

3. Istorikai liudija, kad Tytuvėnų vienuolyno mokykloje mokyti vienuoliai skyriui baigiantis visiems, kas troško mokytis toliau, pateikdavo spręsti tokį skaičių dėlionės po tris uždavinį. Žemiau pateikiama paslaptinga to uždavinio sąlyga:

Kažkur toli, labai toli, bet, sako, dar Žemaičių vyskupystės žemėse, akmenyje yra iškalti tokie 6 sveikieji skaičiai (sako, nebūtinai visi skirtingi), iš kurių mes renkamės visais galimais būdais kiekvieną kartą vis kitaip imdami po tris skaičius. Taip dėliojant 10 kartų gaunama 16-kai lygi suma ir likusius 10 kartų gaunama suma yra 18.
Vienuoliai iš karto palikdavo mokytis antrus metus visus tuos, kurie galėdavo per valandą nustatyti, kam lygus pats mažiausias iš tų (kaip sako, nebūtinai skirtingų) sveikųjų skaičių.

SPRENDIMAS
Turėdami 6 skaičius, turime $\binom{6}{3} = \frac{6(6-1)(6-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ galimybių sudėti juos visais galimais būdais po tris skaičius.
Pasakyta, kad 10 sudėčių po 3 skaičius duoda 16 ir likę 10 būdų duoda 18, todėl iš viso visi 20 būdų per visas 20 sumų duoda $10 \cdot 16 + 10 \cdot 18 = 340$-iai lygią visų galimų sumų po 3 skaičius “sumų sumą“.
Kadangi kiekvienas į sumą imamas 10 kartų (sakysime, pirmasis imamas su antru ir trečiu, su antru ir ketvirtu, su antru ir penktu, su antru ir šeštu, su trečiu ir ketvirtu, su trečiu ir penktu, su trečiu ir šeštu, su ketvirtu ir penktu, su ketvirtu ir šeštu, bei su penktu ir šeštu), be to, $\binom{5}{2} = \frac{5(5-1)}{1 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$), tai visų 6 skaičių suma yra lygi $340 : 10 = 34$.
Todėl iš tų 6 skaičių, duodančių tik 2 skirtingas sumas, dedant juos visais galimais būdais po 3, tik 2 skaičiai gali būti skirtingi. Nes jeigu būtų tik lygiai trys skirtingi skaičiai a, b ir c, tai kurio nors, sakysime, a, būtų 2 egzemplioriai ir tada atsirastų jau 3 skirtingos sumos $a + a + b$, $a + a + c$ *ir* $a + b + c$. Panašiai elgtumės, jeigu jų būtų daugiau.
Vadinasi, tėra tik 2 skirtingi skaičiai a ir b. Tada būtinai vieno kurio yra vienintelis „egzempliorius“, o kito – likę 5 „egzemplioriai“ (nes jei būtų kiekvienos rūšies bent 2, tai tada vienos, kurios rūšies, sakysime a, rastųsi bent 3 egzemplioriai ir tada 3 sumos po 3 skaičius $a + a + a$, $a + a + b$ ir $a + b + b$ būtų skirtingos. Vadinasi, vienos kurios rūšies yra vienintelis egzempliorius, o kitos – likę 5. Taigi mūsų atveju būtų rinkiniai
a, a, a, a, a ir b arba a, b, b, b, b ir b (čia $a < b$). Pirmuoju atveju $a + a + a = 16$ ir a nėra sveikasis skaičius. Kitu atveju $b + b + b = 18$ ir $b = 6$, tada $a + b + b = 16$ ir $a = 4$ yra mūsų uždavinių atsakymas.

Atsakymas: pats mažiausias iš tų sveikųjų skaičių lygus 4.

4. Vienoje Raseinių šeimoje buvo keli broliai, kurie visi buvo gimę (iš karto ir nepatikėtum) vieną ir tą pačią (skirtingų) metų dieną. Visų brolių amžiaus vidurkis buvo 20 metų. Broliai savo gimtadienį švęsdavo per ištisą dieną trunkančią šventę, susidedančią iš šventinių pusryčių, šventinių pietų ir šventinės vakarienės.
Per šventinius pusryčius nebuvo tik dar neatsikėlusio jauniausiojo brolio, ir dėl to jų visų amžiaus vidurkis tuojau šoktelėjo iki 22 metų.
Per pietus, kai jaunėlis jau buvo atėjęs, bet vyriausias brolis išvykęs į šventinį priėmimą Raseinių savivaldybėje, visų likusių pietaujančių brolių amžiaus vidurkis sudarė vos 13 metų.

Per vakarienę, kai vyriausias brolis dar nebuvo pargrįžęs iš savivaldybės, o jauniausiojo brolio dėl koncerto muzikos mokykloje vėl nebebuvo, visų prie stalo esančių brolių amžiaus vidurkis buvo jau 14 metų.
Kiek brolių yra toje įspūdingoje Raseinių šeimoje?

SPRENDIMAS.
Sakykime, kad toje šeimoje yra n brolių, o jų amžiai s1, s2,... s(n-1) ir s(n) yra išdėstyti didėjančia eile. Tada 1 brolis yra jauniausias, o n-tasis brolis – vyriausias.
Pagal sąlygą

$$\frac{s1+s2+...+s(n-1)+s(n)}{n}=20\,,$$

$$\frac{s2+...+s(n-1)+s(n)}{n-1}=22\,,$$

$$\frac{s1+s2+...+s(n-1)}{n-1}=13,,$$

$$\frac{s2+...+s(n-1)}{n-2}=14.$$

Tada

$s1+s2+...+s(n-1)+s(n)=20n,$

$s2+...+s(n-1)+s(n)=22(n-1),$

s1 + $s2+...+s(n-1)=13(n-1),$

$s2+...+s(n-1)=14(n-2),$

Dabar gana pastebėti, kad sudėjus abi kraštines lygybes gauname tą patį, kaip ir dėdami abi vidurines lygybes.
Todėl būtinai
$20n + 14(n-2) - 22(n-1) - 13(n-1) = 0.$
Vadinasi,
$20n + 14n - 22n - 13n = 28 - 22 - 13 = -7 = -n.$
Todėl $n = 7$.
Atsakymas:
Yra 7 broliai.

5. Tytuvėnuose kasdieną yra surašomi kokie nors 5 iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Ar galėtų vieną kurią dieną Tytuvėnuose nutikti taip, kad pirmojo skaičiaus skaitmenų suma yra 52, o penktojo – tik 20?

SPRENDIMAS
Kadangi skaitmenų suma sumažėja 32, tai pakeliui turėjo būti stipri devynetų griūtis ir ne mažiau kaip 4 devynetai pakeliui turėjo virsti nuliais.
Truputį parašinėję galime rasti, pavyzdžiui, tokią skaičių virtinę:

989 998, 989 999, 990 000, 990 001, 990 002.

Atsakymas: gali, pavyzdys pateikiamas. Pastaba: pati mažiausia tokia skaičių virtinė būtų 889 999, 890 000, 890 001, 890 002, 890 003.