DVYLIKTOJI KALĖDINĖ KOMANDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA
PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2011-12-13

1. Magdalena Raseiniškė mėgsta pradėti bet kurį darbą tokiu uždaviniu, kurį, kaip ji sako, išspręsti išsprendi, o daryti beveik nieko nereikia. Vienas iš tokių uždavinių, kuriuo ji pradeda šią dieną, yra uždavinys, kuriame esame prašomi nustatyti, kiek yra tokių natūraliųjų skaičių *n*, prie kurių pridėjus skaitmenų sumą, gauname 2011? Tokių natūraliųjų skaičių *n* yra:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 21

Sprendimas

Kadangi bet kokio keturženklio skaičiaus, neviršijančio "metų skaičiaus" 2011, skaitmenų suma yra ne didesnė už skaičiaus 1999 skaitmenų sumą, kuri yra

$$1 + 9 + 9 + 9 = 28,$$

todėl gana būtų išbandyti visus skaičius pradedant nuo

$$2011 – 28 = 1983.$$

Tačiau

$$1983 + (1 + 9 + 8 + 3) = 2004,$$
$$1984 + (1 + 9 + 8 + 4) = 2006$$

ir taip toliau toje dešimtyje iki pat

$$1989 + (1 + 9 + 8 + 9) = 2016.$$

Taigi visos tos dešimties sumos yra lyginės ir todėl negali būti lygios 2011, nes jį, kaip nelyginį, jos "prašoka".

Perėjus į naują dešimtį

$$1990 + (1 + 9 + 9 + 0) = 2009$$

sumos vėl didėja po 2 pradedant nuo ką tik gautųjų

$$2009$$

ir todėl kita suma

$$1991 + (1 + 9 + 9 + 1) = 2011$$

yra tinkama ir jau duoda mums vieną reikiamą pavyzdį, o likę tos dešimties skaičiai jau vėl nė vienas nebetiks, nes jų sumos bus visos, suprantama, didesnės už 2011.

Tolesnėje naujoje dešimtyje, pradedant nuo 2000, visos sumos vėl, panašiai kaip ir

$$2000 + (2 + 0 + 0 + 0) = 2002,$$

bus lyginės ir "prašoks" 2011.

Galiausiai

$$2010 + (2 + 0 + 1 + 0) = 2013,$$

nors ir nelyginė, bet jau yra per didelė, o toliau, jau su

$$2011,$$

skaičiuojama suma bus dar didesnė ir todėl tikrinimą jau galima baigti.

Taigi radome vienintelį skaičių

$$n,$$

lygų

$$1991,$$

kuris sudėtas su savo skaitmenų suma

1 + 9 + 9 + 1,

duoda "metų skaičių"

2011

ir todėl iš siūlomų atsakymų turime rinktis atsakymą *B*.

Atsakymas

B

2. Raseinių krašto aukščiausioje futbolo lygoje žaidžia 6 komandos, kurios visos turi sužaisti po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Toje lygoje už kiekvienas laimėtas rungtynes skiriami 3 taškai, už rungtynes, sužaistas lygiosiomis, komanda gauna 1 tašką, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų negauna. Sužaidus visas rungtynes pirmosios 3 komandos išeina į kitą varžybų etapą. Tuo atveju, jeigu kelios komandos surenka po lygiai taškų, Magdalena Raseiniškė visada sugeba absoliučiai objektyviai išrikiuoti jas galutinėje turnyro lentelėje ir taip atrinkti tas tris komandas.

Sužaidus visas rungtynes Ariogalos komanda "Dubysos verpetai" pateko į kitą varžybų etapą.

Kiek mažiausiai taškų galėjo būti surinkę "Dubysos verpetai"?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Sprendimas

Pirmiausiai pastebėkime, kad surinkusi 2 taškus (arba mažiau) komanda "Dubysos verpetai" negali įsiterpti tarp pirmųjų trijų komandų (ir išeiti į kitą varžybų etapą).

Tikrai, jeigu komanda tesurenka du taškus arba dar mažiau, tai reiškia, jog ji daugiausiai

2

rungtynes sužaidė lygiosiomis, vadinasi, toji komanda pralošė mažų mažiausiai

5 – 2 = 3

kartus, o pralošusi bent tris kartus ji bent jau toms

trims

komandoms leido pelnyti bent po

3

taškus ir jau tos trys komandos tikrai bus surinkusios bent po 3 taškus ir todėl galutinėje komandų rikiuotėje bus aukščiau "Dubysos verpetų" ir tų "Dubysos verpetų" į pirmąjį trejetą jos jau niekaip "nepraleis".

Taigi su

2 taškais

įsiterpti tarp

pirmųjų 3 komandų

"Dubysos verpetai" niekaip negali.

Toliau, jeigu "Dubysos verpetai" surenka

3 taškus,

tai tada gali taip nutikti, kad ji bus surikiuota trečia galutinėje komandų rikiuotėje (ir išeis į tolimesnį žaidynių etapą).

Pavyzdys

Pateikiame tokio galimo turnyro pavyzdį kartu su komandų rikiuote.

Komanda	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	3	3	3	3	3	12	I
B	0	X	3	3	3	3	9	II
C	0	0	X	1	1	1	3	III-VI
D	0	0	1	X	1	1	3	III-VI
E	0	0	1	1	X	1	3	III-VI
F	0	0	1	1	1	X	3	III-VI

Į atitinkamus langelius įrašyta, kiek taškų kiekviena komanda gavo už rungtynes su kiekviena kita komanda.

Dabar, kad ir kaip Magdalena Raseiniškė berikiuos tas keturias po 3 taškus surinkusias komandas, vienai kuriai nors iš jų, kad ir tik 3 taškus tesurinkusiai, ji turės skirti trečiąją vietą ir būtent tą komandą mes pavadinsime “Dubysos verpetais”.

Vadinasi, gali būti taip, kad komanda surenka vos 3 taškus ir vis tiek yra rikiuojama pirmoje turnyro komandų pusėje tarp pirmųjų trijų tokio turnyro komandų.

Atsakymas

“Dubysos verpetai” gali mažiausiai surinkti 3 taškus.

Teisingas yra atsakymas

C

3. **Šiluvos miesto šviesiųjų protų ir dailiųjų menų apžiūra šiais metais turi prasidėti iškilmingu vadinamosios Šiluvos ateities trupmenos** $\frac{2013}{2003}$ **užrašymo pavidalu** $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$, **kur *a*, *b*, *c* ir *d*, suprantama, turi būti natūralieji skaičiai.**

Gautąjį vadinamąjį giluminį skaičių *d* paprastai užrašo pats Šiluvos seniūnas. Kokį skaičių *d* užrašys Šiluvos seniūnas?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 200 (E) 2003

Sprendimas

Kadangi Šiluvos seniūnas rašys

$$\frac{2013}{2003}=\frac{2003+10}{2003}=1+\frac{10}{2003}=1+\cfrac{1}{\cfrac{2003}{10}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{2000+3}{10}}=1+\cfrac{1}{200+\cfrac{3}{10}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{200+\cfrac{1}{\cfrac{10}{3}}}=1+\cfrac{1}{200+\cfrac{1}{\cfrac{9+1}{3}}}=1+\cfrac{1}{200+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}},$$

tai giluminis skaičius

d,

kurį jis iškilmingai užrašys, bus lygus

3,
o tai reiškia, jog teisingas yra atsakymas
B.

Atsakymas

Šiluvos seniūnas užrašys giluminį skaičių
3.
B

4. Šimkaičiuose du patyrę skautai ne juokais susiginčijo, kuri viena iš žemiau užrašytų trupmenų negali būti užrašyta kaip dviejų trupmenų $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ suma, kur *m* ir *n* yra skirtingi natūralieji skaičiai. Tai kuri gi iš tų trupmenų yra taip neužrašoma?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{3}{5}$ **(C)** $\frac{3}{6}$ **(D)** $\frac{3}{7}$ **(E)** $\frac{3}{8}$

Sprendimas

Kadangi

$$\frac{3}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},$$

tai (A) atveju toji trupmena išreiškiama tokiu būdu, kaip prašoma.

Toliau

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{5+1}{10}=\frac{5}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5},$$

vadinasi, ir (B) atveju toji trupmena išreiškiama tokiu būdu, kaip buvo prašoma.

Dar toliau

$$\frac{3}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},$$

todėl ir (C) vėl yra taip, kaip reikia.

Galiausiai atveju (E)

$$\frac{3}{8}=\frac{2+1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

arba vėl gauname taip, kaip ir reikėtų gauti pagal sąlygą.

Likęs atvejis (D). jeigu vadovautumės “Kengūros” konkurso nuostatomis – vienintelis iš 5 siūlomų atsakymų yra teisingas – turi būti teisingas – arba kad trupmena

$$\frac{3}{7}$$

tada turi būti prašomu būdu neišreiškiama.

Pamėginsime tai įrodyti.

Sakykime, kad, atvirkščiai, trupmena

$$\frac{3}{7}$$

yra išreiškiama skirtingų trupmenų

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

suma.

Tada

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

su skirtingais natūraliaisiais m ir n.

"Išsilaisvinus" iš trupmenų, gaunama lygybė

$$3mn=7m+7n,$$

arba, padauginus lygybę iš 3,

$$9mn=21m+21n,$$

o išskaidžius -

$$(3m-7)(3n-7)=49.$$

Toliau mėgindami visais galimais būdais skaidyti

49

dviem sveikaisiais dauginamaisiais gautume

49 = (– 49)·(– 1) = (– 7)·(– 7) =(– 1)·(– 49) = 1 · 49 = 7 · 7 = 49 · 1

ir galėtume užrašyti 6 atitinkamas sistemas, iš kurių mėgintume surasti natūraliąsias *m* ir *n* reikšmes.

Deja, nė viena iš tų galimų 6 lygčių sistemų neturi natūraliųjų sprendinių, todėl ir galutinai paaiškėja, kad būtent trupmena

$$\frac{3}{7}$$

yra neišreiškiama kaip dviejų trupmenų

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

suma ir todėl renkamės atsakymą *D*.

Atsakymas

D

5. Nuo mokslų "rubežiaus" ėmė eiti garsas apie du natūraliuosius skaičius *m* ir *n*, gebančius išlaikyti sąryšį

$$2^m+2^n=1280.$$

Tai patyrę visi toliau švelniai, bet nuosekliai ėmė aiškintis, kam gi tada yra lygi tų skaičių *m* ir *n* suma.

Tų skaičių *m* ir *n* suma yra

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 32 (E) 64

Sprendimas

Užtektų pastebėti, kad

$$1280=128\cdot 10=2^7\cdot(8+2)=2^7(2^3+2)=2^{10}+2^8$$

ir todėl toji

m* ir *n

suma yra lygi

10 + 8 = 18

ir todėl renkamės atsakymą *C*.

Atsakymas

Skaičių *m* ir *n* suma yra 18, o tai reiškia atsakymą

C

6. Ariogaloje vaikas, grįždamas iš mokyklos namo, staiga pamatė tris skaičius x, y ir z, tenkinančius lygtis $2x + y + z = 8500,\ x + 2y + z = 9500,\ x + y + 2z = 12000$ **ir sustojęs lyg įkastas ėmė galvoti, kam gi yra lygus tų jo rastųjų skaičių x, y ir z vidurkis.**

Tų Ariogalos vaiko rastųjų skaičių x, y ir z vidurkis yra

(A) 2500 (B) $\frac{10000}{3}$ **(C) 7500 (D) 10000 (E) jam surasti reikėtų daugiau informacijos**

Sprendimas.

Klajojantis dvejetas visose trijose lygtyse vis prie kito nežinomojo esant visur kitur visiems kitiems kintamiesiems imamiems tik po kartą skatinte skatintų visas tas tris lygtis sudėti ir tada prie visų kintamųjų

x, y ir z

susirinktų vienodi koeficientai (visur būtų po 4), todėl taip ir darome:

$$2x + y + z + x + 2y + z + x + y + 2z = 8500 + 9500 + 12000 = 30000.$$

Toliau viskas aišku, nes tada

$$4x + 4y + 4z = 30000.$$

Padalijus "viską" iš 4 būtų

$$x + y + z = 7500.$$

Vadinasi, kintamųjų x, y ir z vidurkis

$$\frac{x + y + z}{3}$$

yra 3 kartus mažesnis už skaičių

7500

ir yra lygus

7500 : 3 ,

o tai yra

2500

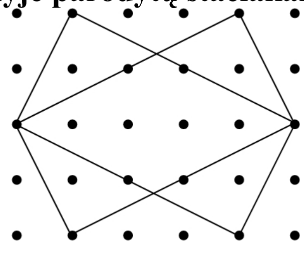
ir reiškia, kad teisingas yra atsakymas *A*.

Atsakymas.

Skaičių x, y ir z vidurkis yra 2500.

A

7. Lyduvėnų mokykloje yra dėstomas milimetrinės aritmetikos ir kristalų gardelių fakultatyvas. Brėžinyje parodyta gardelė, atstumas tarp artimiausių kurios taškų yra lygus 1 mikronas. Keliais kvadratiniais mikronais yra matuojama dviejų brėžinyje parodytų stačiakampių bendroji dalis?



(A) 6 **(B)** $6\frac{1}{4}$ **(C)** $6\frac{1}{2}$ **(D) 7** **(E)** $7\frac{1}{2}$

Sprendimas

Pažymėkime tuos 6 gardelės taškus, priklausančius tiems stačiakampiams, raidėmis

$$A, B, C, D, E \text{ ir } F,$$

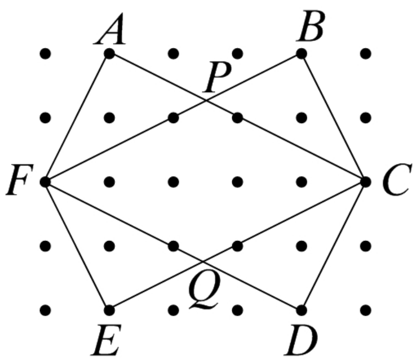
ir tegu likę du stačiakampių sankirtos taškai yra

$$P,$$

(kur susikerta *AC* ir *BF*) ir

$$Q$$

(kur susikerta *CE* ir *DF*).



Trikampiai

$$APB \text{ ir } CPF$$

yra panašūs, o jų pagrindai sutinka kaip

$$3 : 5.$$

Todėl

$$\Delta CPF$$

aukštinės ilgis yra

$$\frac{5}{8} \cdot 2 = \frac{5}{4},$$

o kadangi jo pagrindo ilgis yra

$$5,$$

tai jo plotas yra

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 5.$$

Kadangi tas pats galioja ir trikampiui

$$\Delta CQF,$$

tai visas ieškomasis plotas yra

$$\frac{5}{4} \cdot 5 = 6\frac{1}{4}$$

kvadratinių mikronų ir todėl renkamės atsakymą *B*.

Atsakymas

Bendras plotas yra $6\frac{1}{4}$.

B

8. Į Tytuvėnų kolegiją "Eiklusis skaičius" per pastaruosius trejus metus nebuvo

priimtas mokytis nė vienas, kuris per stojamąjį egzaminą nesugebėdavo (be skaičiuoklio) susivokti, su kokiu mažiausiu 2-tų skaičiumi skaičius

12222…21

dalijasi iš

999 999 999?

(A) 71 (B) 80 (C) 89 (D) 1221 (E) 2011

Sprendimas.

Tegul

$$P = 12….21$$

turi

n dvejetų,

o

$$Q = 999\ 999\ 999.$$

Tada

$$P = 11111…10 + 11111…1 =$$

(abiejuose dėmenyse yra po n + 1 vienetą)

$$= 11 \cdot 11111….1$$

(antrajame daugiklyje yra n + 1 vienetas).

Kadangi

$$Q = 999\ 999\ 999 = 9 \cdot 111\ 111\ 111,$$

tai "pirmiausiai" reikia, kad skaičius

11111….1 (su n + 1 vienetu)

pasidalytų iš

111 111 111

(su daugikliu 11 skaičius Q neturi nieko bendro).

Pirmasis toks pasidalijimas, suprantama, bus, kai

$$n + 1$$

bus

9,

arba, kai pats

$$n$$

bus

8.

Panašiai kitas toks "pasidalijimas" bus, kai n bus

17,

o pats dalmuo tada bus

1 000 000 001.

Toliau dar kitą kartą vėl "pasidalins", kai n bus

26,

o pats dalmuo tada bus

1000000001000000001

(tarp gretimų vienetų kiekvieną kartą įsiterpia aštuoni nuliai).

Matome, kad dalmens vienetų skaičius po 1 didėja, vadinasi, jo skaitmenų suma kiekvieną kartą "paauga" per 1.

Todėl, kai n bus

35,

tai dalmens skaitmenų suma bus jau 4,
kai 44, tai 5,
kai 53, tai 6,
kai 62, tai 7,
kai 71, tai 8
ir
kai 80, tai dalmens skaitmenų suma bus 9.
Vadinasi, tada tas dalmuo dar kartą pasidalins iš 9, ko mums ir reikėjo.
Tai ir yra tas pirmasis atvejis, kai skaičius

$$Q = 999\,999\,999$$

dalija skaičių

$$P = 12\ldots.21,$$

kuris tada, kaip ką tik paaiškėjo, turi

$$n = 80$$

dvejetų.

Todėl teisingas yra atsakymas su 80 dvejetų, įterptų tarp kraštinių vienetų, arba atsakymas *B* .

Atsakymas

Skaičius turi 80 dvejetų

B

9. Žemygaloje trys "pasistūmėję" trečiokai tris dienas blaškėsi ieškodami mažiausio 22-ženklio skaičiaus, kurio skaitmenų suma yra 22, kuris baigiasi 22 ir kuris be liekanos dalijasi iš 22, kol galų gale jį surado. To jų surastojo mažiausiojo skaičiaus tūkstančių skaitmuo yra

(A) 9 (B) 7 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Sprendimas

Žemygalos trečiokams labai pasisekė ir jie rado tą skaičių iš esmės pačiu pirmuoju bandymu.

Iš tikrųjų, jiems pirmiausiai lengviausia yra paisyti dviejų dalykų:

(a) Pirma, žiūrėti, kad tas ieškomasis skaičius tikrai būtų 22-ženklis, vadinasi, pasirūpinti, kad jo pirmasis skaitmuo būtų bent

$$1.$$

(b) Jis turi baigtis 22.

Vadinasi, pirmiausiai dėmesys krypsta į

1 000 000 000 000 000 00? ?22

pavidalo skaičius.

Toliau, jeigu jo pirmasis skaitmuo yra

$$1,$$

o paskutinieji du skaitmenys sudaro skaičių

$$22,$$

tai tarp jų ieškodami paties mažiausio mes tarp jų turime įterpti kuo arčiau galo keletą skaitmenų, kurių suma būtų

$$17,$$

nes tiek mums dar trūksta iki bendro viso skaičiaus skaitmenų sumos, kad jis būtų

$$22.$$

Tuos skaitmenis geriausiai talpinti 19 ir 20 skiltyje, nes norime, kad jis būtų kuo mažesnis.

Dar teks pasirūpinti dalyba iš 11, nes paskutinis lyginis skaitmuo 2 garantuoja dalumą iš 2.

Tada pats mažiausias toks skaičius būtų

1 000 000 000 000 000 008 922

ir jei tik jis dalysis iš

11,

tai jis tikrai ir bus pats mažiausias iš visų galimų tokių skaičių.

Dalumo iš 11 požymis yra toks: skaičiuojame skaitmenų sumą “lyginėse” ir “nelyginėse” vietose ir atimame jas vieną iš kitos.

Jei tos lyginių ir nelyginių vietų sumos yra lygios, arba jeigu jų skirtumas yra 11 kartotinis, tai tada tas tikrinamasis skaičius dalijasi iš 11.

Mūsų atveju tikrinamasis skaičius yra dvidešimtdvidviženklis, jo pirmasis skaitmuo yra

1,

devynioliktasis skaitmuo –

8,

o dvidešimtpirmasis –

2.

Vadinasi, nelyginių vietų skaitmenų suma yra

$$1 + 8 + 2 = 11,$$

o likusių skaičių skaitmenų suma irgi yra 11, nes juk viso skaičiaus skaitmenų suma yra

22.

Todėl tas skaičius dalijasi iš 11, o kadangi jis yra lyginis, tai ir iš

22.

Kadangi skaičiaus

1 000 000 000 000 000 008 922

tūkstančių skaitmuo (ketvirtas nuo galo) yra

8,

tai ir renkamės atsakymą *E*

Atsakymas

Ieškomojo mažiausiojo skaičiaus tūkstančių skaitmuo (ketvirtas nuo galo) yra 8.

E

10. Visi Magdalenos Raseiniškės anūkai ir kaimynai yra patyrę, kad garsioji jų žemietė su visu rimtumu mano, jog vaiką tik tada jau galima leisti vieną eiti apsipirkti, jei jis jau gali išspręsti tokį skaitinį rebusą, arba atstatyti tokią daugybą stulpeliu

```
    * * * 1
        2 *
    -------
  * * 3 * *
  * 4 * *
  -------
  5 * * * *
```

jeigu jam dar yra nurodyta, kad tų abiejų dauginamųjų skaitmenų suma yra viena ir ta pati. Toji skaitmenų suma yra

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 4

Sprendimas

Atsakymas

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 2 & 3 & 1\\
 & & & & 2 & 6\\ \hline
 & 1 & 3 & 3 & 8 & 6\\
+ & 4 & 4 & 6 & 2 & \\ \hline
 & 5 & 8 & 0 & 0 & 6
\end{array}$$

Perrašykime tą pavyzdį tokiu būdu:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & X1 & X2 & X3 & 1\\
 & & & & 2 & X4\\ \hline
 & X5 & X6 & 3 & X7 & X8\\
+ & X9 & 4 & X10 & X11 & \\ \hline
 & 5 & X12 & X13 & X14 & X15.
\end{array}$$

Akivaizdu, kad

$$X4 = X8 = X15$$

ir

$$X11 = 2.$$

Be to, aišku, kad arba

$$X1 = 1,$$

arba

$$X1 = 2,$$

nes kitaip būtų

$$2X1 > 5,$$

o tai jau prieštarauja sąlygai. Pažymėkime pirmąjį dauginamąjį keturženklį skaičių

$$P = X1\ X2\ X3\ 1,$$

o antrąjį dviženklį skaičių –

$$Q = 2\ X4.$$

(H) Sakykime, X1 = 1 (*P* = X1 X2 X3 1).

Tada

$$X5 = 1,$$
$$X9 = 3$$

ir

$$3402 \leq 2P \leq 3492.$$

Iš čia

$$1701 \leq 1\ X2\ X3\ 1 \leq 1746.$$

Patikrinę tris galimus variantus

$$P = 1701,\ Q = 27,$$
$$P = 1711,\ Q = 28,$$

ir

$$P = 1721,\ Q = 29,$$

matome, kad nė vienas iš jų netinka.

(HH) Sakykime, kad dabar

$$X1 = 2,$$

tada

$$X9 = 4,$$

$X5 = 1$

ir

$X2 = 2.$

Dabar būtinai

$X6 \leq 5,$

nes kitaip

$X6 + 4 > 9,$

o tai prieštarauja sąlygai.

Bet tada

$5 \leq X4 \leq 7.$

Tikrindami 3 galimus atvejus

$$P = 2221, \quad Q = 25,$$

$$P = 2231, \quad Q = 26$$

ir

$$P = 2241, \quad Q = 27$$

antruoju atveju gauname tai, ko mes ieškojome ir ko tikėjosi Magdalena Raseiniškė.

Atsakymas

Dauginamojo ir daugiklio skaitmenų sumos yra po 8.

C

DVYLIKTOJI KALĖDINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI
Raseiniai, 2011-12-13

1. Magdalena Raseiniškė iš 36 langelių sudarytos kvadratinės 6 x 6 lentelės langeliuose
nori išdėlioti 18 prašmatnių sagučių, padėdama po vieną sagutę į kai kuriuos tos lentelės langelius. Ar gali jai pavykti išdėlioti lentoje tas sagutes taip, kad kiekvienoje tos lentelės eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose ilgosiose tos lentelės įstrižainėse būtų padėta po 3 sagutes? Jei tai įmanoma, duokite pavyzdį, o jei neįmanoma, tai tą įrodykite.

Sprendimas

Sagutes (S) Magdalena Raseiniškė gali išdėlioti, pavyzdžiui, kad ir taip:

		S	S	S	
S			S		S
S	S			S	
		S	S		S
	S	S		S	
S	S				S

Atsakymas

Sagutes galima išdėlioti taip, kaip to pageidauja uždavinio sąlyga.

2. Magdalena Raseiniškė, nuvažiavusi aplankyti į Viduklę nuo vakar jau pilnų aštuonerių metų anūkėlio Dovyduko ir patyrusi, kad ir jis, ir kasdien kaskart pastebimiau, krypsta į viliojančius aritmetinius menus, nedelsdama pasiūlė jam vietoj kilograminio triufelio kilnojimo geriau pirma išspręsti optimistinį skaitinį rebusą

$$AUGS^2 = AU***GS,$$

kur skirtingomis raidėmis yra žymimi skirtingi, o vienodomis raidėmis – vienodi skaitmenys, o 3
žvaigždutės pakeičia tris viduryje praleistus bet kokius skaitmenis.

Sprendimas

Sprendžiant rebusą

$$AUGS^2 = AU***GS$$

pirmiausiai aišku, jog

$$A = 1,$$

nes didesniems A rebuse lygybės būti negali.

Toliau būtinai turi būti

$$U = 0,$$

nes kitaip užrašų

$$1UGS^2$$

ir

$$1U***GS$$

antrieji skaitmenys sutapti negali.

Todėl jau turime

$$10GS^2 = 10{*}{*}{*}GS.$$

Dabar skaičius

$$G < 5,$$

o skaičiai

$$GS$$

ir

$$GS^2$$

baigiasi vienodais skaitmenimis.

Tokių skaičių yra trys:

$$01,\ 25 \text{ ir } 76.$$

Pastarasis trečiasis yra per didelis (nes, kaip sakyta, $G < 5$), pirmasis kartotų pradžios skaitmenis, trečiasis tinka.ir gauname atsakymą

$$1025^2 = 1050625.$$

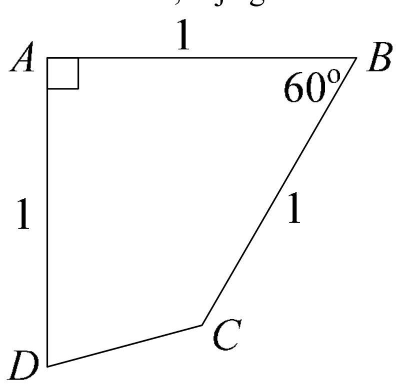
Atsakymas

$1025^2 = 1050625.$

3. Magdalena Raseiniškė per atvirą geometrinio grožio seminarą Tytuvėnuose demonstravo atviru klausimu formuluojamą užduotį, kurį, kaip jai atrodo, per pusvalandį privalo galėti teisingai išspręsti didžioji dalis viso pasaulio raseiniškių.

Brėžinyje yra parodytas legendinis Lyduvėnų keturkampis $ABCD$, kurio trys kraštinės AB, BC ir AD yra lygios 1, $\angle BAD$ yra status, o $\angle ABC = 60°$.

Magdalena Raseiniškė klausia, ar tikrai tame legendiniame Lyduvėnų keturkampyje $\angle BDC = 2\,\angle DBC$, ir jeigu tai iš tikrųjų taip yra, tai kaip tada tuo negirčijamai įsitikinti?



Sprendimas

Jeigu sujungtume atkarpa taškus

$$A \text{ ir } C,$$

tai gautume lygiašonį trikampį

$$ABC,$$

kurio viršūnės kampas B (pažymėtas brėžinyje) yra lygus 60º.

Bet lygiašonis trikampis su 60º kampu prie viršūnės yra lygiakraštis, vadinasi, visos kraštinės yra lygios:

$$AB = BC = AC = 1.$$

Bet tada ir trikampis

DAC

su akivaizdžiai

30°

lygiu viršūnės kampu

DAC

– irgi lygiašonis.

Tada kiti du lygūs to trikampio

DAC

kampai

ADC ir ACD

yra po

75°.

Jeigu išvestume atkarpą

DB,

tai turėtume trikampį

DAC,

kuris, suprantama, yra statusis ir lygiašonis, vadinasi, abu jo smailieji kampai yra po 45º.

Todėl kampas

DBC,

kaip kampų

ABC ir ABD

skirtumas, yra lygus

$$60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

Vadinasi, paskutinis kalbamojo trikampio kampas

BDC

kaip kampų

ADC ir ADB

skirtumas, yra lygus

$$75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$$

Kadangi

$$\angle DBC = 15^\circ,$$

o

$$\angle BDC = 30^\circ,$$

tada tikrai

$$\angle BDC = 2\angle DBC.$$

Atsakymas

Taip, iš tikrųjų

$$\angle BDC = 2\angle DBC.$$

4. Magdalena Raseiniškė priima į savo būrelį visus vaikus, nesvarbu, kokio amžiaus jie bebūtų (nors pirmenybė teikiama tiems, kurie jau patys vaikšto ir galvoja savo galva), jeigu jie per 1 valandą gali išspręsti tokį uždavinį su 5 nykštukais, išrikiuotais didėjančia eile pagal jų ūgį. Tas nykštukų ūgių išsidėstymas yra toks, kam gretimų pagal ūgį nykštukų ūgių skirtumas, pereinant prie vis aukštesnių nykštukų, vis padvigubėja. Dar yra pasakyta, kad visų penkių nykštukų ūgių vidurkis yra 11 centimetrų didesnis už vidurinio

nykštuko ūgį, o bendras antrojo ir ketvirtojo nykštukų ūgis yra lygus paties didžiausiojo nykštuko ūgiui.

Koks yra to paties didžiausiojo nykštuko ūgis?

Sprendimas

Reikia labai nedidelių aritmetinių įgūdžių ir truputėlio tvarkos berašant, kad pasidarytų neišblėstamai aišku, jog tų penkių nykštukų ūgiai “eina” taip:

$$A, A + T, A + 3T, A + 7T \text{ ir } A + 15T,$$

nes būtent tada gretimų nykštukų ūgių skirtumai

$$(A+T) – A, (A+3T) – (A+T), (A+7T) – (A+3T) \text{ ir } (A+15T) – (A+7T),$$

kurie juk ir yra atitinkamai lygūs

$$T, \quad 2T, \quad 4T \text{ ir } 8T,$$

tikrai kaskart padvigubėja.

Pagal sąlygą visų penkių nykštukų ūgių aritmetinis vidurkis yra lygus trečiojo nykštuko ūgiui plius dar 11 centimetrų, arba, padauginus viską iš 5,

$$A + A + T + A + 3T + A + 7T + A + 15T = 5(A + 3T +11),$$

arba

$$5A + 26T = 5A + 15T + 55.$$

Todėl, nubraukus abiejose pusėse po $5A$, būtų

$$26T = 15T + 55,$$

o vėl numetus nuo abiejų pusių, dabar jau po $15T$, būtų

$$11T = 55,$$

o tai reiškia, kad

$$T = 5.$$

Todėl “patikslinti” nykštukų ūgiai

$$A, A + T, A + 3T, A + 7T \text{ ir } A + 15T$$

pasidaro lygūs

$$A, A + 5, A + 15, A + 35 \text{ ir } A + 75,$$

o kadangi

antras nykštukas su ketvirtu yra kiek penktas nykštukas,

todėl

$$A + 5 + A + 35 = A + 75,$$

arba, numetus nuo abiejų pusių po A ir dar po 40,

$$A = 35.$$

Vadinasi, didžiausiojo nykštuko

$$A + 75$$

ūgis yra

$$35 + 75,$$

arba

$$110$$

centimetrų.

Atsakymas

Paties didžiausiojo nykštuko ūgis yra 110 cm.

5. Raseinių krašto aukščiausioje futbolo lygoje žaidžia 6 komandos, kurios visos turi sužaisti po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Toje lygoje už kiekvienas

laimėtas rungtynes skiriami 3 taškai, už rungtynes, sužaistas lygiosiomis, komanda gauna 1 tašką, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų negauna. Sužaidus visas rungtynes pirmosios 3 komandos išeina į kitą varžybų etapą. Tuo atveju, jeigu kelios komandos surenka po lygiai taškų, Magdalena Raseiniškė visada sugeba absoliučiai objektyviai išrikiuoti jas galutinėje turnyro lentelėje ir taip atrinkti tas tris komandas.

Sužaidus visas rungtynes Ariogalos komanda "Dubysos verpetai" pateko į kitą varžybų etapą.

Kiek mažiausiai taškų galėjo būti surinkę "Dubysos verpetai"?

Sprendimas

Pirmiausiai pastebėkime, kad surinkusi 2 taškus (arba mažiau) komanda "Dubysos verpetai" negali įsiterpti tarp pirmųjų trijų komandų (ir išeiti į kitą varžybų etapą).

Tikrai, jeigu komanda tesurenka du taškus arba dar mažiau, tai reiškia, jog ji daugiausiai

2

rungtynes sužaidė lygiosiomis, vadinasi, toji komanda pralošė mažų mažiausiai

5 – 2 = 3

kartus, o pralošusi bent tris kartus ji bent jau toms

trims

komandoms leido pelnyti bent po

3

taškus ir jau tos trys komandos tikrai bus surinkusios bent po 3 taškus ir todėl galutinėje komandų rikiuotėje bus aukščiau "Dubysos verpetų" ir tų "Dubysos verpetų" į pirmąjį trejetą jos jau niekaip "nepraleis".

Taigi su

2 taškais

įsiterpti tarp

pirmųjų 3 komandų

"Dubysos verpetai" niekaip negali.

Toliau, jeigu "Dubysos verpetai" surenka

3 taškus,

tai tada gali taip nutikti, kad ji bus surikiuota trečia galutinėje komandų rikiuotėje (ir išeis į tolimesnį žaidynių etapą).

Pavyzdys

Pateikiame tokio galimo turnyro pavyzdį kartu su komandų rikiuote.

Komanda	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	3	3	3	3	3	12	I
B	0	X	3	3	3	3	9	II
C	0	0	X	1	1	1	3	III-VI
D	0	0	1	X	1	1	3	III-VI
E	0	0	1	1	X	1	3	III-VI
F	0	0	1	1	1	X	3	III-VI

Į atitinkamus langelius įrašyta, kiek taškų kiekviena komanda gavo už rungtynes su kiekviena kita komanda.

Dabar, kad ir kaip Magdalena Raseiniškė berikiuos tas keturias po 3 taškus surinkusias komandas, vienai kuriai nors iš jų, kad ir tik 3 taškus tesurinkusiai, ji turės skirti trečiąją vietą ir būtent tą komandą mes pavadinsime “Dubysos verpetais”.

Vadinasi, gali būti taip, kad komanda surenka vos 3 taškus ir vis tiek yra rikiuojama pirmoje turnyro komandų pusėje tarp pirmųjų trijų tokio turnyro komandų.

Atsakymas

“Dubysos verpetai” gali mažiausiai surinkti 3 taškus.