PASVALIO KRAŠTO
18-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2016 m. lapkričio 25 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Visi skaičiai nuo 1 iki n surašyti į eilę ir tarp jų sudėti + arba − ženklai. Atlikus veiksmus, gaunamas skaičius n. Ar n gali būti lygus:

(a) 2016?
(b) 2015?

Sprendimas.
(a) Galima, nes
$$(1+2-3)+(4-5-6+7)+...+(2012-2013-2014+2015)+2016=2016.$$
(b) Negalima. Kad ir kokius ženklus surašytume, tarp skaičių 1, 2, ..., 2014 bus lygiai 1007 nelyginiai skaičiai. Nelyginio skaičiaus nelyginių skaičių (tiek teigiamų, tiek neigiamų) suma nelyginė, o likusių lyginių skaičių suma lyginė, todėl
$$(\pm 1) + (\pm 2) + \ldots + (\pm 2014) \neq 0.$$
Ats.: (a) taip; (b) ne.

2. Iš kokio triženklio skaičiaus atėmus jo skaitmenų kubų sumą gaunamas didžiausias skaičius.

Sprendimas. Tegu $\overline{abc}=100a+10b+c$ yra triženklis skaičius. Reiškinys
$$100a+10b+c-(a^3+b^3+c^3)=a(100-a^2)+b(10-b^2)+c(1-c^2)$$
įgyja didžiausią reikšmę, kai kiekvienas narys įgyja didžiausią reikšmę. Perrinkę $a=1,...,9,$ gauname, kad pirmas dėmuo maksimalus, kai $a=6.$ Analogiškai, antras dėmuo maksimalus, kai $b=2,$ o trečias, kai $c=0$ arba $c=1.$ Taigi ieškomi skaičiai yra 620 ir 621.

Ats.: 620 ir 621.

3. 1000-kampio viršūnės sunumeruotos numeriais nuo 1 iki 1000. Pradėdami nuo 1, pažymėkime kas 15-ą viršūnę, t. y. 1, 16 ir t. t. viršūnes. Praėję vieną ratą, tęskime žymėjimą tol, kol prieisime jau pažymėtą viršūnę. Kiek viršūnių liks nepažymėta?

Sprendimas. Kadangi $1+15\cdot 66=991,$ $1+15\cdot 67=1006,$ tai antrą ratą pradėsime nuo 6-os viršūnės, o baigsime pažymėdami 996-ą viršūnę. Trečią ratą pradėsime nuo 11-os viršūnės, o baigsime 986-ąja viršūne. Todėl pirma ketvirto rato viršūnė, kurios numeris 1, bus paskutinė. Taigi iš viso bus pažymėta $67+67+66=200$ viršūnių. Liks $1000-200=800$ nepažymėtų 1000-kampio viršūnių.

Ats.: 800.

4. Du laivai stovinčiame vandenyje plaukia vienodu greičiu. Kuris laivas greičiau nuplauks to paties ilgio atkarpą pirmyn ir atgal: ar upėje su greitesne, ar upėje su lėtesne srove?

Sprendimas. Pasižymėkime: v_0 – laivo greitį stovinčiame vandenyje, v_1 ir v_2 – atitinkamai pirmos ir antros upės srovės greitį, o S – upės atkarpos ilgį. Tada sugaištas pirmo ir antro laivo laikas yra atitinkamai

$$t_1 = \frac{S}{v_0 + v_1} + \frac{S}{v_0 - v_1} = \frac{2Sv_0}{v_0^2 - v_1^2} \quad \text{ir} \quad t_2 = \frac{2Sv_0}{v_0^2 - v_2^2}.$$

Kadangi $v_1 > v_2$, tai $t_1 > t_2$.

Ats.: Greičiau nuplauks laivas, kuris plauks upe su lėtesne srove.

5. Įrodykite, kad lygtis

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 14x + 24 = 0$$

neturi sprendinių.

Įrodymas. Pertvarkydami kairę lygties pusę, gausime:

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 14x + 24 = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + x^2 + (7x^2 - 14x + 7) + 17 =$$
$$= x^2(x-2)^2 + x^2 + 7(x-1)^2 + 17 > 0.$$

6. Konkurse dalyvavo 5 žmonės. Į kiekvieną iš pateiktų klausimų vienas davė neteisingą atsakymą, o kiti teisingą. Algis pateikė mažiausiai teisingų atsakymų – 10, o Benis daugiausiai – 13. Kiek klausimų buvo užduota?

Sprendimas. Teisingų atsakymų skaičius dalus iš 4. Algis teisingai atsakė į 10 klausimų, Benis – į 13, o likusieji į 11 arba 12 klausimų. Taigi teisingų atsakymų skaičius yra tarp $10 + 13 + 3 \cdot 11 = 56$ ir $10 + 13 + 3 \cdot 12 = 59$. Taigi klausimų skaičius yra $\frac{56}{4} = 14$.

Ats.: 14.

7. Keliais būdais 8×8 šachmatų lentoje įmanoma taip pažymėti vieną baltą ir vieną juodą langelį, kad jie nebūtų vienoje eilutėje arba stulpelyje?

Sprendimas. Aišku, kad yra 32 būdai pasirinkti baltą langelį. Pasirinkus baltą langelį, išbraukiama atitinkama eilutė ir atitinkamas stulpelis. Juodam langeliui pasirinkti lieka 7×7 matmenų lentos dalis, kurioje yra 24 juodi langeliai. Taigi iš viso yra $32 \cdot 24 = 768$ būdai.

Ats.: 768.

8. Natūralieji skaičiai a ir b pasižymi savybe: kiekvienas iš dešimties skaitmenų sutinkamas lygiai viename iš šių dviejų skaičių. Raskite mažiausią galimą $|a - b|$ reikšmę.

Sprendimas. Pirmiausia reikia įsitikinti, kad abu skaičiai (ir a, ir b) turi būti penkiaženkliai, nes tik tada galima pasiekti, kad skirtumas $|a - b|$ būtų triženklis skaičius.

Ieškomai porai (a; b) rasti taikykime perrankos metodą. Išnagrinėkime visas galimybes rinkdamiesi a ir b taip, kad skaičiaus a pirmas skaitmuo būtų vienetu didesnis už pirmą b skaitmenį, o kiti skaitmenys išsidėstytų taip, kad a būtų pats mažiausias, o b – pats didžiausias. Gausime:

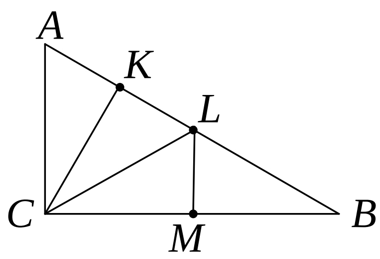
$$90\,123 - 87\,654 = 2\,469, \qquad 80\,123 - 79\,654 = 469,$$
$$70\,123 - 69\,854 = 269, \qquad 60\,123 - 59\,874 = 249,$$
$$50\,123 - 49\,876 = 247, \qquad 40\,125 - 39\,876 = 249,$$
$$30\,145 - 29\,876 = 269, \qquad 20\,345 - 19\,876 = 469.$$

Matome, kad mažiausias skirtumas (lygus 247) yra tarp skaičių 50 123 ir 49 876.

Ats.: 50 123 ir 49 876.

9. Trikampio *ABC* kraštinėje *AB* yra taškas *K*, atkarpoje *KB* – taškas *L*, atkarpoje *CB* – taškas *M*. Trikampiai *AKC*, *LKC*, *LMC* ir *LMB* yra lygūs. Raskite trikampio *ABC* kampus.

Sprendimas. Trikampio *ABC* kampus $\angle B$ ir $\angle A$ pažymėkime atitinkamai α ir β. Lygių trikampių *LMC* ir *LMB* kraštinė *LM* yra bendra, todėl prieš ją yra lygūs kampai, t. y. $\angle LBM = \angle LCM = \alpha$. Trikampis *CLB* – lygiašonis, todėl $CL = CB$ ir $\angle CLM = \angle BLM$. Taigi *LM* yra lygiašonio trikampio *CLB* kampo prie viršūnės pusiaukampinė. Kartu ji yra šio trikampio aukštinė ir pusiaukampinė. Todėl $\angle CML = \angle BML = 90°$.



Lygiai taip pat įrodoma, kad $\angle CAK = \angle CLK = \beta$, $CK \perp AL$ ir $AC = CL$. Tuomet galimi du atvejai: 1) $\alpha = \beta$ ir 2) $\beta = 90^\circ - \alpha$. Pirmuoju atveju sudėję kampus prie viršūnės *L* gauname lygybę $2(90^\circ - \alpha) + \alpha = 180^\circ$, iš kurios išplaukia, kad $\alpha = 0$. Bet taip negali būti. Vadinasi, $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\angle LCK = \angle ACK = \alpha$, $3(90^\circ - \alpha) = 180^\circ$, $\alpha = 30°$. O tada $\angle A = \beta = 60^\circ$, $\angle B = \alpha = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

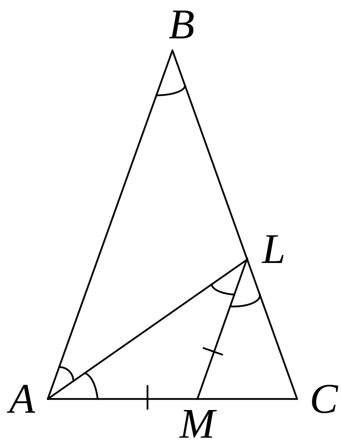
Ats.: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

10. Taškas *L* yra trikampio *ABC* kraštinėje *BC*, o *M* – kraštinėje *AC*. Atkarpa *AL* yra trikampio *ABC* pusiaukampinė, o atkarpa *LM* – trikampio *ALC* pusiaukampinė. Be to, $AM = ML$ ir $\frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$. Raskite trikampio *ABC* kampus.

Sprendimas. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad $\angle LAC = \angle MLC = \angle LAB$. Taigi $LM \parallel AB$, Iš trikampių *MLC* ir *ABC* panašumo išplaukia, kad $\frac{LC}{MC} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$. Kadangi $LM \parallel AB$, tai

$$\angle ABC = \angle MLC = \angle ALM = \angle BAL,$$

todėl trikampis *ABL* lygiašonis, t. y. $AL = BL$. Kadangi $LM \parallel AB$, pagal Talio teoremą $\frac{BL}{AM} = \frac{LC}{MC} = \sqrt{3}$. Taigi $AL = BL = \sqrt{3}AM$. Lygiašonio trikampio *ALM* pagrindas $AL = 2AM\cos\angle LAM$. Vadinasi, $2\cos\angle LAM = \sqrt{3}$, $\angle LAM = 30°$. Tuomet $\angle A = 2\angle LAM = 60^\circ$, $\angle B = \angle LAM = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.



Ats.: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

PASVALIO KRAŠTO
18-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2016 m. lapkričio 25 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Ant automobilio priekinių ratų uždėtos padangos nusidėvi nuvažiavus 30 000 km, o uždėtos ant užpakalinių ratų jos nusidėvi nuvažiavus 50 000 km. Kiek kilometrų nuvažiavus reikia sukeisti vietomis užpakalines ir priekines padangas, kad automobilis nuvažiuotų kuo toliau?

Sprendimas. Nuvažiavus x km, nudėvima dalis $\dfrac{x}{30\,000}$ priekinių padangų protektoriaus bei dalis $\dfrac{x}{50\,000}$ užpakalinių padangų protektoriaus. Jei padangos keičiamos nuvažiavus x km, tai padangos, kurios pradžioje buvo priekyje, nusidėvės nuvažiavus $x+50\,000\left(1-\dfrac{x}{30\,000}\right)=50\,000-\dfrac{2}{3}x$ kilometrų, o padangos, kurios pradžioje buvo užpakalyje, nusidėvės nuvažiavus $x+30\,000\left(1-\dfrac{x}{50\,000}\right)=30\,000-\dfrac{2}{5}x$ kilometrų. Visos padangos pilnai nusidėvės vienu metu, jei $50\,000-\dfrac{2}{3}x=30\,000+\dfrac{2}{5}x$, t. y. jei $\dfrac{16}{15}x=20\,000$, iš kur išplaukia, kad $x=18\,750$ km. Tokiu atveju automobilis nuvažiuos $30\,000+\dfrac{2}{5}x=37\,950$ km. Tai ir bus maksimalus nuvažiuotas atstumas, nes jei $x<18\,750$, tai $30\,000+\dfrac{2}{5}x<37\,950$, o jei $x>18\,750$, tai $50\,000-\dfrac{2}{3}x<37\,950$, taigi kažkurios padangos nusidėvės dar nenuvažiavus 37 950 km.

Ats.: 18 750 km.

2. Natūraliojo skaičiaus n faktorialas (žym. $n!$) yra sandauga $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Kurį dauginamąjį reikia išbraukti iš sandaugos $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 20!$, kad likusi sandauga būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas?

Sprendimas.

$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 20! = (1!\cdot 2!)\cdot(3!\cdot 4!)\cdot\ldots\cdot(19!\cdot 20!) = (1!\cdot 1!\cdot 2)\cdot(3!\cdot 3!\cdot 4)\cdot(5!\cdot 5!\cdot 6)\cdot\ldots\cdot(19!\cdot 19!\cdot 20) =$$

$$= (1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 19!)^2(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 18\cdot 20) = (1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 19!\cdot 2^5)^2\cdot 10!.$$

Taigi reikia išbraukti 10!.

Ats.: 10!.

3. Algis ir Benas atliko po penkis šūvius į taikinį. Per pirmus tris šūvius jie surinko po vienodai taškų, o per paskutinius tris šūvius Algis surinko tris kartus daugiau taškų. Taikinyje buvo išmušti 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 taškai. Kiek taškų išmušė kiekvienas šaulys trečiu šūviu?

Sprendimas. Paskutiniais trim šūviais Benas surinko ne mažiau kaip $2+3+4=9$ taškus. Jis negalėjo surinkti 10 taškų, nes surinko tris kartus mažiau negu Algis. Taigi Benas išmušė 2, 3 ir 4, todėl Algis išmušė 10, 9 ir 8. Pirmais trim šūviais buvo pataikyta į 9, 8, 5 ir 4. Trečiu šūviu Algis išmušė ne mažiau kaip 8, o Benas ne daugiau kaip 4 taškus. Taigi pirmais dviem šūviais Algis išmušė bent 4 taškais mažiau už Beną. Vadinasi, Algis išmušė 5 ir 4, o Benas 9 ir 8 taškus. Iš čia išplaukia, kad trečiu šūviu Algis išmušė 10, o Benas 2 taškus.

Ats.: Algis trečiu šūviu išmušė 10, Benas 2 taškus.

4. Išspręskite nelygybę $\sqrt{2x^2-8x+6}+\sqrt{4x-x^2-3}<x-1.$

Sprendimas. Kadangi reiškiniai pošaknyse turi būti neneigiami, o jie skiriasi tik neigiamu daugikliu –2, tai turi galioti lygybė $x^2-4x+3=0,$ kurią tenkina du skaičiai: 1 ir 3. Iš jų tiktai 3 tenkina nelygybę.

Ats.: 3.

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} ||x|-|y||+|x|+|y|=2, \\ 2y=|2x-1|-3. \end{cases}$$

Sprendimas. Jei $|x|\geq|y|,$ iš pirmos lygties gauname:

$$|x| - |y| + |x| + |y| = 2,$$
$$2|x| = 2,$$
$$|x| = 1.$$

Taigi $x=-1$ arba $x=1.$ O tada $y=\dfrac{|2x-1|-3}{2}$ yra atitinkamai 0 ir −1. Gauname du sistemos sprendinius: (–1; 0) ir (1; –1).

Jei $|x|<|y|,$ iš pirmos lygties gauname:

$$|y|-|x|+|x|+|y|=2,$$
$$2|y|=2,$$
$$|y|=1.$$

Taigi $y=-1$ arba $y=1.$

Jei $y=-1$, iš antros lygties gauname lygtį $|2x-1|=1,$ kurios sprendiniai yra 0 ir 1. Bet sąlygą $|x|<|y|$ tenkina tik $x=0.$ Pora (0; –1) yra sistemos sprendinys.

Jei $y=1,$ iš antros lygties išplaukia, kad $|2x-1|=5,$ o iš čia – $x=3$ arba $x=-2$. Bet nė viena x reikšmė netenkina sąlygos $|x|<|y|$.

Ats.: (−1, 0), (1, −1) ir (0, −1).

6. Pirmas natūraliojo skaičiaus n skaitmuo yra 1. Jei tą vienetą perkeltume į skaičiaus galą, skaičius patrigubėtų. Raskite mažiausią tokį n.

Sprendimas. Tarkime, nubraukus pirmąjį skaitmenį 1 lieka k-ženklis skaičius a; čia $k\geq 1.$ Tada $0\leq a<10^k$ ir $n=10^k+a.$ Jei pradinį 1 perkelsime į galą, gausime skaičių $10a+1.$ Taigi

$$10a+1=3(10^k+a)\ \Rightarrow\ 7a=3\cdot 10^k-1.$$

Dalydami (pavyzdžiui, kampu) skaičių $3\cdot 10^k-1=2\underbrace{99\ldots9}_{k}$ iš 7, gauname, kad $299\,999=7\cdot 42\,857.$

Taigi $a=42\,857,$ o mažiausias skaičius n yra 142 857.

Ats.: $n=142\,857.$

7. Raskite $\dfrac{a^2}{b+c+d}+\dfrac{b^2}{c+d+a}+\dfrac{c^2}{d+a+b}+\dfrac{d^2}{a+b+c}$,

jei $\dfrac{a}{b+c+d}+\dfrac{b}{c+d+a}+\dfrac{c}{d+a+b}+\dfrac{d}{a+b+c}=1.$

Sprendimas. Iš sąlygos išplaukia, kad $a+b+c+d\neq 0.$ Padauginę lygybę $\dfrac{a}{b+c+d}+\dfrac{b}{c+d+a}+\dfrac{c}{d+a+b}+\dfrac{d}{a+b+c}=1$ iš $a+b+c+d$, gauname:

$$\frac{a^2+a(b+c+d)}{b+c+d}+\frac{b^2+b(a+c+d)}{c+d+a}+\frac{c^2+c(a+b+d)}{d+a+b}+\frac{d^2+d(a+b+c)}{a+b+c}=a+b+c+d,$$

$$\left(\frac{a^2}{b+c+d}+a\right)+\left(\frac{b^2}{c+d+a}+b\right)+\left(\frac{c^2}{d+a+b}+c\right)+\left(\frac{d^2}{a+b+c}+d\right)=a+b+c+d.$$

Iš čia išplaukia, kad $\dfrac{a^2}{b+c+d}+\dfrac{b^2}{c+d+a}+\dfrac{c^2}{d+a+b}+\dfrac{d^2}{a+b+c}=0.$

Ats.: 0.

8. Raskite visas parametro k reikšmes, kurioms esant lygtis $x^3+2x^2-k^2x-2k^2=0$ turi tris skirtingus realiuosius sprendinius, sudarančius aritmetinę progresiją.

Sprendimas. Lygties kairę pusę pertvarkykime taip:
$x^3+2x^2-k^2x-2k^2=(x^3+2x^2)-(k^2x+2k^2)=x^2(x+2)-k^2(x+2)=(x+2)(x^2-k^2).$
Iš čia išplaukia, kad lygtis turi tris skirtingus sprendinius tik kai $k\notin\{-2;0;2\}$. Šie sprendiniai yra -2, $-k$ ir k.

Kad sprendiniai sudarytų aritmetinę progresiją -2, $-k$, k arba k, $-k$, -2 turi galioti sąlyga $-k+2=k+k$ $(-k-k=-2+k)$, t. y. $k=\dfrac{2}{3}.$

Kad sprendiniai sudarytų aritmetinę progresiją -2, k, $-k$ arba $-k$, k, -2 turi galioti lygybė $k+2=-2k$ $(2k=-2-k)$, iš kurios išplaukia, kad $k=-\dfrac{2}{3}.$

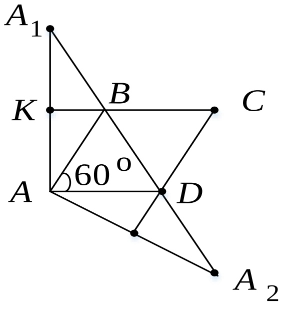
Kad sprendiniai sudarytų aritmetinę progresiją $-k, -2, k$ arba $k, -2, -k$ turėtų galioti neįmanoma lygybė $-2+k=k+2$ $(-2-k=-k+2)$.

Ats.: $k=\pm\dfrac{2}{3}.$

9. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kampas BAD lygus 60°. Taškai A_1 ir A_2 yra simetriški taškui A tiesių CB ir CD atžvilgiu. Taškai A_1, A_2, B ir D yra vienoje tiesėje. Raskite kampą BCD.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės CB ir AA_1 susikerta taške K, o tiesės AA_2 ir CD – taške M. Kadangi tiesė BK yra trikampio ABA_1 simetrijos ašis, tai $AB=BA_1$,
$\angle CBD=\angle KBA_1=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle ABD).$ Analogiškai

$$\angle CDB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ADB).$$



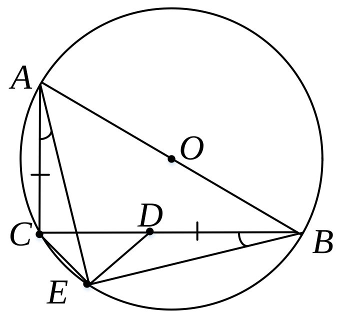
Tada $\angle BCD=180^\circ-\angle CBD-\angle CDB=$

$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABD)-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ADB)=$$

$$=\frac{1}{2}(\angle ABD+\angle ADB)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAD)=60^\circ.$$

Ats.: $\angle BCD=60^\circ.$

10. Į apskritimą įbrėžtas statusis trikampis ABC, $\angle C = 90^\circ$. Ilgesniajame statinyje BC yra taškas D toks, kad $AC = BD$, o taškas E yra lanko AB, kuriame yra taškas C, vidurio taškas. Raskite kampą DEC.



Sprendimas. Pagal sąlygą, taškas E yra lanko AB vidurys, todėl $AE = EB$. Kadangi $\angle CAE = \angle CBE$, ir (pagal sąlygą) $AC = BD$, trikampiai ACE ir BDE yra lygūs. Todėl $\angle CEA = \angle BED$. Iš čia išplaukia, kad

$$\angle DEC = \angle CEB - \angle BED = \angle CEB - \angle CEA = \angle AEB = 90^\circ.$$

Ats.: $\angle DEC = 90^\circ$.