



PASVALIO KRAŠTO
17-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2015 m. lapkričio 27 d.

UŽDAVINIAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Suskaičiuokite, kiek yra natūraliųjų skaičių kvadratų tarp skaičių 4^9 ir 9^4 .
2. Dabar Ona turi 4 kartus daugiau metų negu Petras turėjo tuo metu, kai Onai buvo tiek metų, kiek Petrai yra dabar. Kai Petrai bus tiek metų kiek Onai yra dabar, jų amžių suma bus 95 metai. Kiek metų yra Onai ir Petrai?
3. Raskite natūraliųjų skaičių $2n + 3$ ir $n + 7$ didžiausią bendrą daliklį, kai n yra bet kuris natūralusis skaičius.
4. Įrodykite, kad skaičius
$$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016 \cdot 2017 \cdot \dots \cdot 4029 \cdot 4030$$
dalijasi iš 4031.
5. Kiek yra triženklųjų natūraliųjų skaičių, kurių kvadratas baigiasi 21? Pateikite bent du tokių skaičių pavyzdžius.
6. Nudažytas kubas supjaustomas į vienodus kubelius. Ar gali nudažytų kubelių skaičius būti lygus kubelių, kurių bent viena siena yra nudažyta, skaičiui?
7. Tarkime, kad realiųjų skaičių pora $(x; y)$ yra lygčių sistemos
$$\begin{cases} x^3 + xy + y^2 = -1, \\ y^3 + 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$
sprendinys. Įrodykite, kad $xy = 1$.
8. Padauginus 997 iš natūraliojo skaičiaus n , $n > 1$, gaunamas skaičius, kurio visi skaitmenys yra nelyginiai. Raskite mažiausią tokį skaičių n .
9. Jonas meta monetą. Jei atsiverčia herbas, Algis duoda jam dar vieną monetą, o jei atsiverčia skaičius, tai Jonas atiduoda Algiui dvi monetas. Iš pradžių Jonas turėjo 12 monetų, o po 30 metimų nė vienos nebeliko. Apskaičiuokite, kelis kartus atsivertė herbas.
10. Trapecijos $ABCD$ įstrižainė AC lygi pagrindų AD ir BC sumai. Raskite kampą tarp įstrižainės BD ir kampo CAD pusiaukampinės.



PASVALIO KRAŠTO
17-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2015 m. lapkričio 27 d.

UŽDAVINIAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Įrodykite, kad lygtis

$$x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 = 0$$

neturi realiųjų sprendinių.

2. Įrodykite, kad realiųjų skaičių a ir b pora tenkina nelygybę

$$a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128},$$

jei $a + b = 1$.

3. Raskite visus natūraliuosius skaičius n , kuriems esant $5^n + 3^n$ dalijasi iš $5^{n-1} + 3^{n-1}$.

4. Ar kvadratinio trinomio $ax^2 + bx + c$ su sveikaisiais koeficientais a , b ir c ($a \neq 0$) diskriminantas gali būti lygus 23?

5. Įrodykite, kad jei p , $p - 10$ ir $p + 10$ yra pirminiai skaičiai, tai ir $p - 2$ yra pirminis skaičius.

6. Raskite visus natūraliųjų skaičių x , y ir z trejetus $(x; y; z)$, tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz, \\ x^2 = 2(y + z). \end{cases}$$

7. Išspręskite lygtį

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$$

8. Raskite lygties

$$[x^2] = [x]^2$$

(čia [...] skaičiaus sveikoji dalis) sprendinius, priklausančius intervalui $[-5; 2)$.

9. Du statieji lygiašoniai trikampiai, kurių statinių ilgiai lygūs 1, yra vienoje plokštumoje. Viena pirmo ir antro trikampio statinių pora yra vienoje tiesėje L , o patys trikampiai yra simetriški kitos tiesės, statmenos tiesei L , atžvilgiu. Koks gali būti didžiausias abiejų trikampių bendros dalies plotas?

10. Apskritimo spindulys lygus 1, jo centras taškas O . Apskritime yra pažymėtas taškas P ir nubrėžta styga AB tokia, kad $\angle APB = \angle AOB$. Raskite stygos AB ilgį.