



PASVALIO KRAŠTO
15-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS
OLIMPIADA PROFESORIAUS
BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI
LAIMĖTI

Pasvalys, 2013 m. lapkričio 22d.

Uždaviniai jaunesniųjų klasių mokiniams

- Įrodykite, kad sveikieji skaičiai x ir y dalijasi iš 3, jei $x^2 + y^2$ dalijasi iš 3.
- Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n}\right) < 3.$$
- Tegu taškai A ir B yra vienoje tiesės l pusėje. Tiesėje l raskite tašką M tokį, kad atstumų suma $AM + MB$ būtų mažiausia.
- Natūralieji skaičiai 1, 2, 3, ... iš eilės surašomi į begalinę lentelę (žr. pav.). Kiekvienam lentelės langeliui priskiriama skaičių pora $(m; n)$; čia m yra langelio pozicijos į dešinę numeris, o n – jo pozicijos į viršų numeris. Porą $(m; n)$ vadinkime langelyje parašyto skaičiaus koordinatėmis.

37
36	35	34	33	32	31	...
17	18	19	20	21	30	...
16	15	14	13	22	29	...
5	6	7	12	23	28	...
4	3	8	11	24	27	...
1	2	9	10	25	26	...

- Imant kas antrą apatinės eilės langelį gaunama skaičių seka 1; 9; 25; ... Koks yra 100-asis tos sekos narys?
- Koks skaičius yra langelyje (20; 20)?
- Kokios langelio, kuriame yra skaičius 2013, koordinatės?

- Kiek yra tokių keturženklių skaičių $\overline{x12y}$, kad sandauga $\overline{2xx} \cdot \overline{3y5}$ dalytųsi iš 12?
- Skaičiaus 5632 ir natūraliojo skaičiaus x sandauga $5632x$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Raskite mažiausią x reikšmę.
- Tegu S yra įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras, D – kraštinės AB vidurio taškas ir $\angle ASD = 90^\circ$. Įrodykite, kad $AB + BC = 3AC$.
- Natūralieji skaičiai x , y ir w tenkina lygybę
$$\frac{97}{19} = w + \frac{1}{x + \frac{1}{y}}$$
Apskaičiuokite sumą $x + y + w$.
- Du laivai (200 metrų ilgio ir 100 metrų ilgio) plaukia pastoviais, bet skirtingais greičiais. Plaukdamis vienas prieš kitą, jie prasilenkia per 10 sekundžių. O kai abu plaukia ta pačia kryptimi, greitesnis laivas praplaukia pro lėtesnįjį per 25 sekundes. Koks greitesniojo laivo greitis?
- Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 2, \\ \frac{xz}{x+z} = 3, \\ \frac{yz}{y+z} = 4. \end{cases}$$



PASVALIO KRAŠTO
15-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2013m. lapkričio 22d.

UŽDAVINIAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Duota n sveikųjų skaičių. Įrodykite, kad tarp jų atsiras keletas (arba, gali būti, vienas) skaičių, kurių suma dalijasi iš n .
2. Raskite lygties $x^y + 1 = z$ pirminius sprendinius (pirminių skaičių x , y ir z trejetus, tenkinančius lygtį).
3. Įrodykite, kad trikampio ABC kampo A pusiaukampinė dalija kraštinę BC santykiu $AB : AC$.
4. Įrodykite, kad su bet kuriais nelygiais nuliui skaičiais x ir y
$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \geq x^4 + y^4.$$
5. Realiųjų skaičių a , b ir c trejetas tenkina lygybę
$$\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = 1.$$
Įrodykite, kad $|abc| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Kada galioja lygybė?
6. Natūraliojo skaičiaus n dalybos iš 2009 ir iš 2010 liekana lygi 35. Kokia yra skaičiaus n dalybos iš 42 liekana?
7. Smailiojo trikampio ABC aukštinės BD ir AE susikerta taške P . Įrodykite, kad
$$AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD.$$
8. Tegu $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių x , didesnį už 2013, kad su kuriuo nors natūraliuoju skaičiumi m galiotų lygybė
$$T(x+1) - T(x) = T(m).$$
Įrodykite, kad jei $T(a) + T(b) = T(c)$ ir $a + b + c = T(28)$, tai $ab = 407(a + b - 203)$.
9. Trijų kilimų bendras plotas lygus 200 m^2 . Paklojus ant grindų, jie uždengė 140 m^2 . Lygiai 24 m^2 plotas buvo uždengtas dviem sluoksniais. Koks grindų plotas uždengtas trimis sluoksniais?
10. Prie to paties kelio taškuose A_1, A_2, \dots, A_n stovi po vieną žmogų. Kuriame kelio taške jie turėtų susitikti, kad atstumų, kuriuos reikia kiekvienam iš jų nueiti iki susitikimo vietos, bendra suma būtų pati mažiausia? Išnagrinėkite du atvejus:
a) $n = 12$; b) $n = 21$.