



PASVALIO KRAŠTO  
14-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2012 m. lapkričio 23 d.

UŽDAVINIAI  
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Raskite natūraliųjų skaičių  $x$ ,  $y$  ir  $z$  trejetus  $(x; y; z)$ , kurie tenkina lygybę  $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$ .
2. Tegū  $x^2 + y^2$  dalijasi iš 3; čia  $x$  ir  $y$  yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad tada  $x$  ir  $y$  dalijasi iš 3.
3. Įrodykite, kad lygybė

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

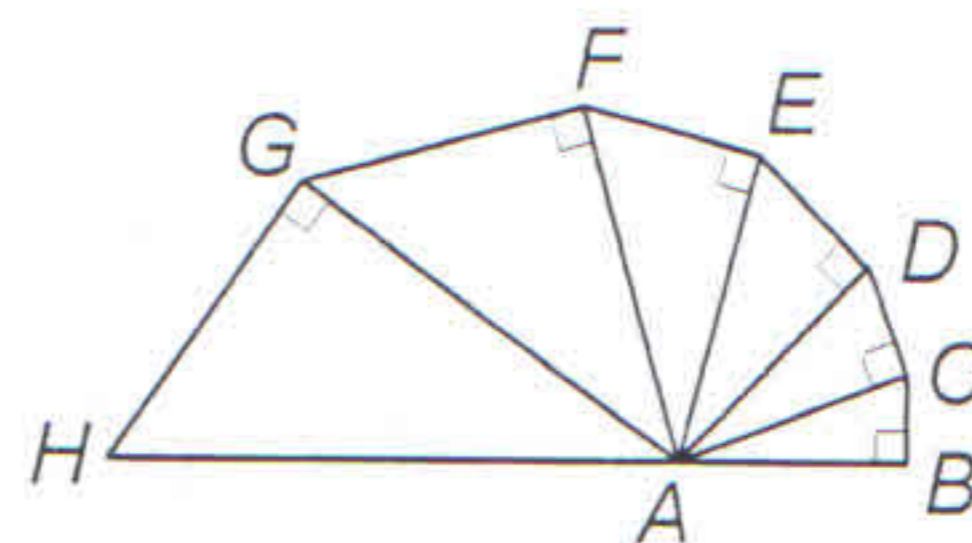
yra teisinga su visais  $n \geq 2$ .

4. Realieji skaičiai  $x$  ir  $y$ ,  $x \neq y$ , tenkina lygybes  $x^2 = 8x + y$  ir  $y^2 = x + 8y$ . Raskite  $x^2 + y^2$ .
5. Inde yra 320 g balto cukraus. Mišinys  $A$  gaunamas iš indo išbėrus  $x$  g balto ir po to įbėrus  $x$  g rudo cukraus ir gerai sumaišius. Balto ir rudo cukraus santykis mišinyje  $A$  yra  $a:b$  (trupmena  $a:b$  nesuprastinama). Mišinys  $B$  gaunamas iš indo išbėrus  $x$  g mišinio  $A$  ir po to įbėrus  $x$  g rudo cukraus. Balto ir rudo cukraus santykis mišinyje  $B$  yra 49:15. Raskite  $x + a + b$ .
6. Raskite natūraliųjų skaičių  $p$  ir  $q$  porų  $(p, q)$ , tenkinančių sąlygas

$$\frac{p + q^{-1}}{p^{-1} + q} = 17, \quad p + q \leq 100,$$

skaičių.

7. „Sraigės kiautas“ sudarytas iš 6 trikampių (žr. pav.), kurių kampai  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  ir  $90^\circ$ ;  $AB = 1$  cm. Raskite  $AH$ .



8. Raskite  $a - \frac{1}{a}$ , kai  $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3$ ,  $a > 0$ .
9. Kam lygi skaičiaus  $\frac{10^{27} + 2}{3}$  skaitmenų suma?
10. Ūkininkas mirdamas liepė savo keturiems sūnums pasidalinti arklius: vyriausiam – trečdalį, antrajam – ketvirtadalį, o jaunėliams dvyniams – po penktadalį arklių. Bet sūnums nesisekė pasidalinti arklius, nes skaičiuodami gaudavo trupmeninius skaičius. Kai viena kumelė atsivedė kumeliuką, ūkininko sūnūs arklius pasidalino, nors kumeliukas niekam neatiteko. Kiek arklių turėjo ūkininkas?



PASVALIO KRAŠTO  
14-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2012 m. lapkričio 23 d.

**UŽDAVINIAI**  
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Duoti  $n + 1$  skirtingi natūralieji skaičiai, mažesni už  $2n$ . Įrodykite, kad iš jų galima išrinkti tris tokius skaičius, kad vienas iš jų būtų lygus kitų dviejų sumai.
2. Išspręskite lygtį  $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ .
3. Įrodykite, kad atstumas tarp statmenų, nuleistų iš apskritimo taško į du fiksuotus jo skersmenis, pagrindų nepriklauso nuo to taško pasirinkimo.
4. Žinoma, kad  $x + \frac{1}{x}$  yra sveikas skaičius. Įrodykite, kad tada  $x^n + \frac{1}{x^n}$  taip pat yra sveikas skaičius su visais sveikaisiais  $n$ .
5. Darbas pradėtas tarp 9 ir 10 val., baigtas tarp 10 ir 11 val. Baigus darbą minutinė rodyklė buvo toje pačioje vietoje, kurioje buvo valandinė rodyklė darbo pradžioje. Ir atvirkščiai, valandinė rodyklė buvo minutinės rodyklės vietoje. Per kiek laiko buvo atliktas darbas?
6. Išspręskite lygtį  $\log_{5x+9}(x^2 + 6x + 9) + \log_{x+3}(5x^2 + 24x + 27) = 4$ .
7. Salėje buvo kelios vienodos kėdžių eilės. Kiekvienoje horizontalioje eilėje sėdėjo po 14 berniukų, o kiekvienoje vertikalioje eilėje sėdėjo po 10 mergaičių. Trys kėdės buvo tuščios. Įrodykite, kad iš viso buvo nemažiau kaip 567 kėdės.
8. Duota seka  $\{a_n\}$ :
$$a_n = \left[ 10^n \cdot \frac{1}{13} \right] - 10 \left[ 10^{n-1} \cdot \frac{1}{13} \right], \quad n = 1, 2, \dots;$$
čia  $[a]$  yra skaičiaus  $a$  sveikoji dalis. Kokia didžiausia  $a_n$  reikšmė?
9. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x + xy + x^2 = 9, \\ y + xy + y^2 = -3. \end{cases}$$
10. Natūralieji skaičiai išdėstyti didėjančia tvarka trikampyje (žr. pav.). Raskite eilutės, kurioje yra skaičius 400, narių sumą.

1  
2 3  
4 5 6  
7 8 9 10  
.....