PASVALIO KRAŠTO
13-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2011 m. lapkričio 25 d.

Uždaviniai jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Devyni vienodi rašikliai kainuoja 11 litų su centais, o trylika tokių pat rašiklių kainuoja 15 litų su centais. Kiek kainuoja vienas rašiklis?

2. Įrodykite, kad skaičius p^2-1 dalijasi iš 24, jei $p>3$ yra pirminis skaičius.

3. Ar galima užpildyti $n\times n$ lentelę skaičiais -1, 0, $+1$ taip, kad tų skaičių sumos kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų skirtingos?

4. Raskite visus sveikųjų skaičių x, y ir z trejetus (x; y; z), kuriems esant galioja lygybės

$$x+y=2 \quad \text{ir} \quad xy-z^2=1.$$

5. Iš keturženklio skaičiaus A, kurį sudaro skaitmenys 1, 3, 5 ir 7, atimtas keturženklis skaičius B, sudarytas iš skaitmenų 2, 4, 6 ir 8. Raskite galimai mažiausią teigiamą skirtumą $A-B$.

6. Raskite skaičiaus $a=1!+2!+\ldots+2011!$ dalybos iš 18 liekaną. Čia $n!=n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$, $n=1,2,\ldots,2011$, yra skaičiaus n faktorialas.

7. Tegu $a_1<a_2<\ldots<a_{44}$ yra natūralieji skaičiai, ne didesni už 125. Įrodykite, kad tarp skirtumų $d_i=a_{i+1}-a_i$, $i=1,2,\ldots,43$, reikšmių yra tokia, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų.

8. Nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis

$$\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)^{x^2-2x}=1.$$

9. Kiek yra natūraliųjų skaičių n, kurie tenkina nelygybę

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)^5\cdot\ldots\cdot\left(n-\frac{4021}{2}\right)^{4021}<0\,?$$

10. Su kuriais natūraliaisiais skaičiais k iš eilės einančių k natūraliųjų skaičių suma dalijasi iš k?

PASVALIO KRAŠTO
13-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2011 m. lapkričio 25 d.

Uždaviniai vyresniųjų klasių mokiniams

1. Rasti sumą

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!.$$

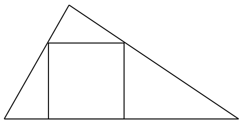
2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)<2.$$

3. Ar galima suvynioti kubą į kvadratinį popieriaus lapą, jei lapo kraštinė yra tris kartus ilgesnė už kubo briauną?

4. Kiekvienas plokštumos taškas nudažomas raudona arba mėlyna spalva. Įrodykite, kad, laisvai pasirinkus teigiamą skaičių d, galima rasti ta pačia spalva nudažytų taškų, tarp kurių atstumas lygus d.

5. Kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra a, įbrėžtas į trikampį (žr. 1 pav.), kurio pagrindo ilgis lygus b. Įrodykite, kad kvadrato plotas negali viršyti pusės trikampio ploto.



1 pav.

6. Tegu $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ yra realieji skaičiai. Raskite visus realiuosius skaičius x, su kuriais funkcija

$$f(x)=\sum_{i=1}^{100}|x-a_i|=|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_{100}|$$

įgyja mažiausią reikšmę.

7. Tegu $a_1 < a_2 < \ldots < a_{44}$ yra realieji skaičiai, ne didesni už 125. Įrodykite, kad tarp skirtumų $d_i = a_{i+1}-a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 43$, reikšmių yra tokia, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų.

8. Yra skaičių seka, kurios nariai apibrėžiami taip:

$$x_1 = x_2 = 1,$$
$$x_{n+1} = 2011x_n + 2012x_{n-1},\ \ n \ge 2.$$

Raskite liekaną, gaunamą dalijant x_{2011} iš 3.

9. Raskite skaičių natūraliųjų skaičių a, kuriems esant yra toks sveikasis skaičius b, $0 \le b \le 2011$, kad abi lygtys

$$x^2+ax+b=0 \ \text{ ir } \ x^2+ax+b+1=0$$

turi sveikų sprendinių.

10. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y}=6, \\ \dfrac{4xz}{x+z}=3, \\ \dfrac{3yz}{y+z}=2. \end{cases}$$