



**PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ  
DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2010 m. lapkričio mėn. 26 d.  
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**U Ž D A V I N I A I  
JAUNESNIŪJŲ KLASIŲ MOKINIAMS**

- Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais  $n$  trupmena  $\frac{12n+1}{30n+2}$  yra nesuprastinama.
- Kvadratas su kraštine  $a$  tiesėmis, lygiagrečiomis su jo kraštinėmis, padalytas į  $n^2$  lygių kvadratų. Į kiekvieną gautą kvadratą įbrėžiamas skritulys. Įrodykite, kad pradinio kvadrato dalies, nepadengtos skrituliais, plotas nepriklauso nuo  $n$ .
- Skaičiai  $a_1, \dots, a_n$ , kurių kiekvienas lygus  $+1$  arba  $-1$ , yra tokie, kad
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$
Įrodykite, kad  $n$  yra dalus iš 4.
- Nustatykite, kiek nesuprastinamų trupmenų yra tarp šių trupmenų:
$$\frac{1}{144}, \frac{2}{144}, \frac{3}{144}, \dots, \frac{143}{144}.$$
- Natūralieji skaičiai 12, 15 ir  $n$  turi tokią savybę: bet kurių dviejų sandauga dalijasi iš trečiojo. Raskite galimai mažiausią  $n$  reikšmę.
- Skaičiai  $a$  ir  $b$  tenkina dvi sąlygas:
$$ab + ab^2 + \dots + ab^{10} = 18$$
ir
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab^2} + \dots + \frac{1}{ab^{10}} = 6.$$
Raskite skaičių  $ab, ab^2, \dots, ab^{10}$  sandaugą.
- Taškas  $K$  yra už 60 metrų į vakarus nuo taško  $P$ . Katė tupi taške  $K$ , o pelė yra taške  $P$ . Apskaičiuokite, per kiek laiko katė pagautų pelę, jei, bėgdama 13 m/s greičiu, ji pasirinktų optimalų maršrutą, o pelė bėgtų nuo katės 7 m/s greičiu tiese  $PM$ , kuri su rytų kryptimi sudaro  $60^\circ$  kampą.
- Raskite visų sveikųjų parametro  $a$  reikšmių, su kuriomis lygtis
$$x^3 - ax + a + 11 = 0$$
turi bent vieną natūralųjį sprendinį  $x$ , sumą.
- Keturių skirtingų natūraliųjų skaičių vidurkis lygus 8. Raskite galimai didžiausią iš jų.
- Stačiakampio  $ABCD$  kraštinėje  $AB$  pažymėtas taškas  $E$ , o kraštinėje  $BC$  – taškas  $F$  taip, kad trikampio  $AED$  plotas lygus 5, trikampio  $BEF$  plotas lygus 4, o trikampio  $CFD$  plotas lygus 3. Raskite trikampio  $DEF$  plotą.



**PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ  
DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2010 m. lapkričio mėn. 26 d.  
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**U Ž D A V I N I A I  
VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS**

1. Raskite visus sveikuosius  $n$ , su kuriais  $\frac{19n+17}{7n+11}$  yra sveikasis skaičius.

2. Raskite sandaugą

$$A_n = 101 \cdot 10001 \cdot 100000001 \cdot \dots \cdot \underbrace{100\dots001}_{2^n - 1 \text{ nulių}}.$$

3. Išspręskite sveikaisiais skaičiais lygtį

$$1! + 2! + \dots + x! = y^2.$$

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x - \sqrt{yz} = 42, \\ y - \sqrt{zx} = 6, \\ z - \sqrt{xy} = -30. \end{cases}$$

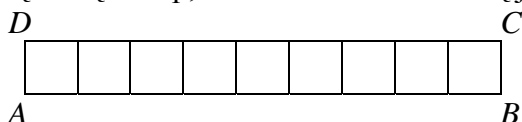
6. Neneigiami sveikieji skaičiai  $a$ ,  $b$  ir  $c$  tenkina lygtį

$$3 \cdot 10^a + 5 \cdot 10^b + 7 \cdot 10^c = 5073.$$

Raskite sumą  $a + b + c$ .

7. Taškas  $K$  yra už 60 metrų į vakarus nuo taško  $P$ . Katė tupi taške  $K$ , o pelė yra taške  $P$ . Tegu  $M$  yra taškas, kuriame katė pagautų pelę, jei bėgdama 13 m/s greičiu, ji pasirinktų optimalų maršrutą, o pelė bėgtų nuo katės 7 m/s greičiu tiese  $PM$ , kuri su rytų kryptimi sudaro kampą  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ). Įrodykite, kad taškas  $M$  priklauso tam pačiam apskritimui nepriklausomai nuo kampo  $\alpha$  didumo.

8. Devyni kvadratai sudaro stačiakampį  $ABCD$  (žr. pav.). Šių kvadratų kraštinėmis voras keliauja iš taško  $A$  į tašką  $C$  taip, kad kiekviena kraštinė į jo maršrutą įeitų ne daugiau kaip vieną kartą.



Nustatykite, kokio ilgio galimų maršrutų yra daugiausia ir kiek tokio ilgio maršrutų yra.

9. Stačiojo trikampio  $ABC$  įžambinėje  $BC$  taškai  $P$  ir  $Q$  pažymėti taip, kad galioja šios sąlygos:  $BP = PQ = QC$ ,  $AP = 3$  ir  $AQ = 4$ . Raskite trikampio  $ABC$  kraštinių ilgį.

10. Stačiakampio  $ABCD$  kraštinėje  $AB$  pažymėtas taškas  $E$ , o kraštinėje  $BC$  – taškas  $F$  taip, kad trikampio  $AED$  plotas lygus 5, trikampio  $BEF$  plotas lygus 4, o trikampio  $CFD$  plotas lygus 3. Raskite trikampio  $DEF$  plotą.