PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2008 m. lapkričio mėn. 28 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

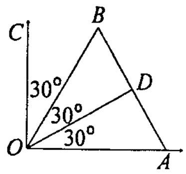
UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
(jaunesniųjų klasių grupė)

1. Visi nelyginiai natūralieji skaičiai suskirstyti į grupes taip, kad pirmąją grupę sudaro 1, antrąją – 3 ir 5, trečiąją – 7, 9 ir 11 ir t. t. Grupės narių skaičius didinamas vienetu. Įrodykite, kad n-osios grupės skaičių suma lygi n^3.

Įrodymas. Pirmųjų $n-1$ grupių narių skaičius yra $1+2+3+...+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Paskutinis skaičius yra $2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}-1=n^2-n-1$. Vadinasi, pirmasis skaičius n-oje grupėje yra $(n^2-n-1)+2=n^2-n+1$. Šioje grupėje yra n nelyginių skaičių, todėl paskutinis skaičius yra $(n^2-n+1)+2(n-1)=n^2+n-1$. Visos eilutės skaičių suma yra

$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2}\cdot n=n^3.$$

2. Paaiškinkite, kaip statųjį kampą liniuotės ir skriestuvo pagalba padalyti į tris lygias dalis.



Sprendimas. Iš pradžių brėžiame lygiakraštį trikampį OAB. Gauname kampą BOC, lygų 30°. Paskui atkarpą AB dalijame į dvi lygias atkarpas ($AD = DB$) ir brėžiame pusiaukampinę OD. Gauname dar du lygius kampus po 30° ($\angle AOD$ ir $\angle DOB$).

3. Įrodykite, kad

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Sprendimas. Pakėlę kvadratu reiškinį $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, gausime kairėje parašytos šaknies pošaknį:

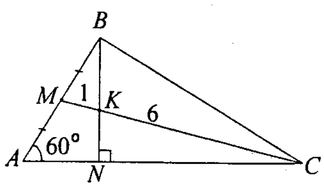
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=2+3+5+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=$$
$$=10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}.$$

4. Kroso varžybose Jonas užėmė vidurinę vietą tarp visų dalyvių. Petras užėmė žemesnę, dešimtą, vietą, o Povilas atbėgo šešioliktas. Kiek bėgikų dalyvavo krose?

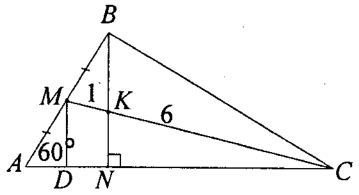
Sprendimas. Aišku, kad dalyvių skaičius yra nelyginis, todėl galėtų būti 17 arba didesnis. Skaičius 17 tenkina uždavinio sąlygą. Bet kuris kitas nelyginis skaičius (didesnis už 17) netenkina sąlygos, kad Petras užėmė žemesnę vietą negu Jonas.

Ats.: 17.

5. Trikampio ABC kampas BAC lygus 60°. Atkarpa CM yra trikampio pusiaukraštinė, BN – aukštinė, o K – jų susikirtimo taškas. Raskite kitus du trikampio ABC kampus, kai $CK=6$ ir $KM=1$.



Sprendimas. Nubrėžkime $MD \perp AC$. Atkarpa MD yra trikampio ABN vidurinė linija, todėl $AD = DN$. Trikampiai DMC ir NKC yra panašūs, todėl $DC : NC = 7 : 6$. Iš čia $NC = 6DN$. Tegu $AD = x$. Tada $DN = x$ ir $NC = 6x$. Taigi $AC = 8x$.



Iš stačiojo trikampio ABN nustatome, kad $AB = 2AN = 4x$.

Sugretinę trikampius ABN ir ABC, turinčius bendrą kampą A, gauname, kad $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AB}{AC} = 2$. Vadinasi, šie trikampiai yra panašieji.
Todėl atitinkami jų kampai yra lygūs.

Išvada tokia: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$

Ats.: 90° ir 30°.

6. Sugalvokite tokį 8-ženklį skaičių, sudarytą iš skirtingų skaitmenų, kad išbraukus bet kuriuos du jo skaitmenis, gautasis 6-ženklis skaičius būtų sudėtinis.

Sprendimas. Aišku, kad uždavinio sąlygą tenkins bet kuris 8-ženklis skaičius, kurio paskutinieji trys skaitmenys (vienetų, dešimčių ir šimtų skilties) yra lyginiai. Pavyzdžiui, 12305468, 21357684 ir t. t.

7. Tegu a ir b yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys nelygybę $a \cdot b > a + b$. Įrodykite, kad $a + b > 4$.

Įrodymas. Teigiamų skaičių a ir b aritmetinį vidurkį $\dfrac{a+b}{2}$ ir geometrinį vidurkį $\sqrt{ab}$ sieja nelygybė $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Remdamiesi ja ir sąlyga $a \cdot b > a + b$, gauname:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b > 2\sqrt{a+b} \Rightarrow (\sqrt{a+b}-2)\sqrt{a+b} > 0 \Rightarrow \sqrt{a+b}-2 > 0 \Rightarrow a+b > 4.$$

8. Marius 5-ženklį skaičių padaugino iš jo skaitmenų sumos. Paskui tą patį padarė su gautu rezultatu. Atsakymas vėl buvo 5-ženklis skaičius. Koks buvo pradinis skaičius? Raskite visas galimybes.

Sprendimas. Pirmiausia išsiaiškiname, kad pradinio 5-ženklio skaičiaus skaitmenų suma negali būti 3 ar didesnis skaičius (po antro žingsnio gautume skaičių, didesnį už 99999).
Iš 5-ženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 1 arba 2 (10000, 10001, 10010, 10100, 11000, 20000) uždavinio sąlygos netenkina tik skaičius 20000.
Ats.: 10000, 10001, 10010, 10100, 11000.

9. Povilas turi juodų ir raudonų kortelių. Jis ima jas po vieną ir deda į dvi krūveles – raudoną ant juodos, o juodą ant raudonos. Negalima dėti kortelės ant tokios pačios spalvos kortelės. Dešimta ir vienuolikta kortelė buvo raudonos spalvos, o dvidešimt penkta – juodos spalvos. Kokios spalvos buvo 26-toji kortelė?

Sprendimas. Aišku, kad po vienuolikos žingsnių abiejų krūvelių viršuje buvo raudonos kortelės. Vienoda spalva išliks ir po trylikos, ir po penkiolikos žingsnių; taigi po $11+2n$, $n \in \mathrm{N}$, žingsnių. Spalva priklauso tik nuo to, kokia ji buvo pasirinkta $(11+2n)$-tajame žingsnyje. Vadinasi, po 25 žingsnių krūvelių viršuje buvo juodos kortelės; todėl 26-toji kortelė galėjo būti tik raudonos spalvos.
Ats.: raudona.

10. Kiškis, vilkas ir kiti miško gyventojai Naujųjų metų proga gavo 55 kankorėžius dovanų (nemažiau kaip po du). Vilkas nusprendė iš karto patikrinti, ar jie valgomi. Visi kiti kankorėžius išsaugojo iki kiškio gimtadienio ir ta proga padovanojo jam po pusę turimų kankorėžių. Dabar kiškis turėjo 10-kart daugiau kankorėžių negu iš pradžių. Kiek kankorėžių gavo vilkas?

Sprendimas. Tegu x yra kiškiui, y – vilkui, o z – kitiems miško gyventojams dovanotų kankorėžių skaičius. Pagal uždavinio sąlygą $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$, $x+y+z=55$ ir $x+\frac{1}{2}z = 10x$. Gauname:

$z = 18x \Rightarrow 19x + y = 55 \Rightarrow x = 2$, $y = 17$.

Ats.: 17.

PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

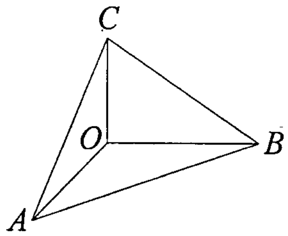
Pasvalys, 2008 m. lapkričio mėn. 28 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

(vyresniųjų klasių grupė)

1. Tegu tiesių atkarpos OA, OB ir OC yra tarpusavyje statmenos ir sudaro trisienį kampą su viršūne O. Įrodykite, kad trikampių ABC, OAB, OAC ir OBC plotai tenkina lygybę

$$S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OBC}.$$



Sprendimas. Tegu a, b ir c yra atitinkamai kraštinių OA, OB ir OC ilgiai. Pagal Pitagoro teoremą

$$AC = \sqrt{a^2+c^2},\ BC = \sqrt{b^2+c^2},\ AB = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Tada pagal Herono formulę

$$S^2_{\Delta ABC} = \frac{AB+AC+BC}{2}\cdot\frac{AC+BC-AB}{2}\cdot\frac{AB+AC-BC}{2}\cdot\frac{AB+BC-AC}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(AC^2+2AC\cdot BC+BC^2-AB^2\right)\cdot\left(AB^2-AC^2+2AC\cdot BC-BC^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(2c^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right)\left(-2c^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4\right) = \frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right) = \left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{ac}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2 =$$

$$= S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OBC}.$$

2. Tegu a, b ir c yra kurio nors trikampio kraštinių ilgiai. Įrodykite, kad

$$ab+bc+ac \le a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac).$$

Įrodymas. Iš trikampio savybių žinome, kad

$$a > |b-c|,\ b > |a-c|,\ c > |a-b|.$$

Todėl

$$a^2+b^2+c^2 > |b-c|^2+|a-c|^2+|a-b|^2 = 2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ac-2ab.$$

Iš čia gauname dešiniąją nelygybę:

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac).$$

Kairiąją nelygybę gauname iš akivaizdžių nelygybių

$$(a-b)^2 \ge 0,\ (b-c)^2 \ge 0 \text{ ir } (a-c)^2 \ge 0$$

(tereikia jas sudėti).

3. Įrodykite, kad su visais $n \ge 2$ galioja nelygybė

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1.$$

Įrodymas. Kiekvienas didesnis už vienetą natūralusis skaičius k tenkina nelygybę

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Be to, trupmeną $\frac{1}{(k-1)k}$ galima išskaidyti dviejų trupmenų skirtumu:

$$\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Taigi $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, kai $k\geq 2$.

Todėl $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1$.

4. Išspręskite lygtį $x^3(x+1)=2(x+a)(x+2a)$, a – realusis skaičius.

Sprendimas. Atlikus veiksmus, lygtį galima užrašyti taip:

$$x^4+x^3-2x^2-6ax-4a^2=0. \qquad (1)$$

Parametro a atžvilgiu ji yra kvadratinė:

$$4a^2+6xa+(-x^4-x^3+2x^2)=0. \qquad (2)$$

Šios lygties diskriminantas yra

$$D=36x^2-16(-x^4-x^3+2x^2)=4x^2(4x^2+4x+1)=4x^2(2x+1)^2.$$

Gauname du sprendinius:

$$a_1=-\frac{x^2+2x}{2} \text{ ir } a_2=-\frac{x^2-x}{2}.$$

Taigi (2) lygties kairiąją pusę galima išskaidyti sandauga $4(a-a_1)(a-a_2)$. Pertvarkę lygtį

$$4\left(a+\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(a-\frac{x^2-x}{2}\right)=0$$

spręskime kintamojo x atžvilgiu. Gausime lygtį

$$(x^2+2x+2a)(x^2-x-2a)=0$$

ir jos sprendinius: $-1\pm\sqrt{1-2a}$, $\frac{1\pm\sqrt{1+8a}}{2}$.

Realiųjų sprendinių skaičius priklauso nuo parametro a reikšmės. Jei $-\frac{1}{8}\leq a\leq\frac{1}{2}$, tai visi (1) lygties sprendiniai yra realūs. Kitais atvejais (1) lygtis turi du realiuosius sprendinius: $(-1\pm\sqrt{1-2a})$, kai $a<-\frac{1}{8}$; $\left(\frac{1\pm\sqrt{1+8a}}{2}\right)$, kai $a>\frac{1}{2}$.

5. Funkcija $f(x)$, $x\in R$, tenkina šias sąlygas: $f(1)=1$, $f(x+5)\geq f(x)+5$, $f(x+1)\leq f(x)+1$. Raskite funkcijos $g(x)=f(x)+1-x$ reikšmę $g(2008)$.

Sprendimas. Remiantis funkcijos $f(x)$ savybėmis galima parašyti tokią nelygybių ir lygybių sistemą:

$$f(x)+5\leq f(x+5)=f((x+4)+1)\leq f(x+4)+1=f((x+3)+1)+1\leq$$
$$\leq f(x+3)+2\leq f(x+2)+3\leq f(x+1)+4\leq f(x)+5.$$

Iš lygybės $f(x)+5=f(x+1)+4$ gauname šią funkcijos $f(x)$, $x\in R$, savybę: $f(x+1)=f(x)+1$. Remiantis ja galima apskaičiuoti $f(2008)$:

$$f(2008)=f(2007)+1=f(2006)+2=\ldots=f(1)+2007=1+2007=2008.$$

Todėl $g(2008)=f(2008)+1-2008=1$.

Ats.: 1.

6. Iš nelyginių natūraliųjų skaičių sudaryta tokia trikampė lentelė:

1						
3	5	7				
9	11	13	15	17		
19	21	23	25	27	29	31
....						

Nustatykite, koks skaičius yra 61-os eilutės viduryje.

Sprendimas. Lentelės eilutėse parašytų skaičių kiekį (skaičių) galima užrašyti formule $2n-1$, $n=1,2,3,\ldots$. Taigi 61-oje eilutėje yra $2\cdot 61-1=121$ nelyginis skaičius. Jos viduryje yra šešiasdešimt pirmasis šios eilutės skaičius. Nustatykime, kiek skaičių yra pirmosiose 60-yje eilučių:

$$1+3+5+7+\ldots+(2\cdot 60-1)=1+3+5+7+\ldots+119=\frac{(1+119)\cdot 60}{2}=3600.$$

Vadinasi, ieškomasis skaičius yra 3661-asis nelyginis natūralusis skaičius, t. y. skaičius $2\cdot 3661-1=7321$.

Ats.: 7321.

7. Raskite visus natūraliųjų skaičių x, y ir z trejetus $(x;\, y;\, z)$, $x\le y\le z$, su kuriais galioja lygybė

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=3.$$

Sprendimas. Jei pasirinktume $x\ge 3$, tai gautume $z\ge y\ge 3$ ir

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\le\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3<3.$$

Vadinasi, yra tik dvi galimybės: $x=1$ arba $x=2$.

Kai $x=1$, gauname lygtį

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{2}.$$

Iš čia $z=2+\dfrac{6}{y-2}$. Tik du sprendiniai (natūraliųjų skaičių poros) tenkina uždavinio sąlygą $y\le z$.

Uždavinio sąlygą tenkina pora $y=3$, $z=8$ ir $y=4$, $z=5$.

Kai $x=2$, turėsime lygtį

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2.$$

Iš jos gausime $z=1+\dfrac{2}{y-1}$ ir vienintelę natūraliųjų skaičių porą $y=2$, $z=3$, tenkinančią uždavinio sąlygą $y\le z$.

Ats.: (1; 3; 8), (1; 4; 5), (2; 2; 3).

8. Raskite didžiausią natūralųjį skaičių n, kurio skaitmenų kubų suma didesnė už n.

Sprendimas. Tarkime, kad k yra skaičiaus n skaitmenų skaičius. Tada $n\ge 10^{k-1}$. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti nelygybė $n\le k\cdot 9^3$. Iš dvigubos nelygybės

$$10^{k-1}\le n\le k\cdot 9^3$$

matyti, kad didžiausia k reikšmė gali būti 4.

Tegu ieškomojo skaičiaus n skaitmenys yra a, b, c ir d ir $n=\overline{abcd}=$ $=1000a+100b+10c+d$; $a, b, c, d\in\{0;1;2;\ldots;9\}$, $a\ne 0$.

Kadangi $1000a\le n\le a^3+b^3+c^3+d^3\le a^3+3\cdot 9^3=a^3+2187$, tai $a\in\{1;2\}$.

Jei būtų $a=2$, tai gautume

$$2000+100b \le n \le 2^3+b^3+c^3+d^3 \le 8+b^3+2\cdot 9^3 = b^3+1466$$

ir nelygybę

$$b^3-100b \ge 534,$$

neturinčių sprendinių aibėje $\{0; 1; 2; ...; 9\}$. Vadinasi, $a=1$.

Skaičiaus $n=1999$ skaitmenų kubų suma $1^3+3\cdot 9^3=2188$ yra didesnė už 1999, todėl 1999 yra ieškomasis skaičius.

Ats.: 1999.

9. Tarkime, kad daugianario $P(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+...+p_nx^n$ koeficientai $p_0, p_1, p_2, ..., p_n$ yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad nėra tokio skirtingų sveikųjų skaičių *a*, *b* ir *c* trejeto, su kuriuo galiotų visos trys lygybės: $P(a)=b$, $P(b)=c$ ir $P(c)=a$.

Įrodymas. Tarkime, kad yra tokie trys skirtingi sveikieji skaičiai *a*, *b* ir *c*, kad $a<b<c$ ir galioja visos trys lygybės: $P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$.

Apskaičiuokime skirtumus $P(a)-P(b)$, $P(b)-P(c)$, $P(c)-P(a)$. Gausime:

$$b-c=P(a)-P(b)=p_1(a-b)+p_2(a^2-b^2)+p_3(a^3-b^3)+...+p_n(a^n-b^n)=$$

$$=(a-b)\,(p_1+p_2(a+b)+p_3(a^2+ab+b^2)+...+$$

$$+p_n(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+...+ab^{n-1}+b^n)).$$

Reiškinio, parašyto skliaustuose, reikšmę pažymėkime m_1; tai sveikasis skaičius. Taigi

$$b-c=P(a)-P(b)=(a-b)m_1. \qquad (1)$$

Analogiškai

$$c-a=P(b)-P(c)=(b-c)m_2,\ m_2\in Z; \qquad (2)$$

$$a-b=P(c)-P(a)=(c-a)m_3,\ m_3\in Z \qquad (3)$$

Sudauginę visas tris lygybes gausime lygybę

$$(a-b)\,(b-c)\,(c-a)=(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,m_1m_2m_3,$$

iš kurios išplaukia, jog $m_1m_2m_3=1$. Vadinasi, $|m_1|=|m_2|=|m_3|=1$. Kadangi (pagal prielaidą) $a>b>c$, tai iš (1), (2) ir (3) išplaukia, kad $m_1=1$, $m_2=-1$, $m_3=-1$. Turime tokią lygybių sistemą:

$$\begin{cases} b-c=a-b, \\ c-a=c-b, \\ a-b=a-c. \end{cases}$$

Sudėjus visas tris lygybes, turėtų galioti lygybė $0=2a-2b$. Bet ji negalima, nes $a>b$. Vadinasi, prielaidą, skaičiai *a*, *b* ir *c* yra skirtingi, reikia atmesti.

Panašiai teiginys įrodomas ir kitais atvejais (kai sveikieji skaičiai *a*, *b* ir *c* tenkina šias nelygybes: 1) $a<c<b$; 2) $b<a<c$; 3) $b<c<a$; 4) $c<a<b$; 5) $c<b<a$.)

10. Mokinys sugalvojo nelyginį natūralųjį skaičių. Prie jo iš dešinės pusės prirašė dar vieną skaitmenį. Iš gautojo skaičiaus atėmė sugalvoto skaičiaus kvadratą ir gavo skaičių, 8 kartus didesnį už sugalvotąjį. Kokį skaičių mokinys sugalvojo ir kokį skaitmenį prie jo prirašė?

Sprendimas. Sugalvotąjį skaičių pažymėkime *x*, o prirašytąjį skaitmenį – *y*. Pagal uždavinio sąlygą $(10x+y)-x^2=8x$. Gauname lygtį $x^2-2x=y$, kuri ekvivalenti lygčiai $(x-1)^2=y+1$.

Kadangi $y\in\{0;1;2;3;...;9\}$, tai galėtų tikti $y=0$, $y=3$ ir $y=8$. Bet uždavinio sąlygą tenkina tik skaičius $y=3$, nes kitais atvejais gautume lyginį skaičių *x* ($x=2$, kai $y=0$, ir $x=4$, kai $y=8$). Taigi $y=3$ ir $x=3$.

Ats.: 3 ir 3.