



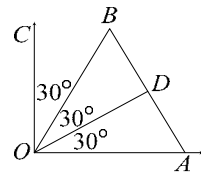
**PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ  
DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2008 m. lapkričio mėn. 28 d.  
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**U Ž D A V I N I A I  
JAUNESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS**

1. Visi nelyginiai natūralieji skaičiai suskirstyti į grupes taip, kad pirmąją grupę sudaro 1, antrąją – 3 ir 5, trečiąją – 7, 9 ir 11 ir t. t. Grupės narių skaičius didinamas vienetu. Įrodykite, kad  $n$ -osios grupės skaičių suma lygi  $n^3$ .

2. Paaškindite, kaip statųjį kampą liniuotės ir skriestuvo pagalba padalyti į tris lygias dalis.

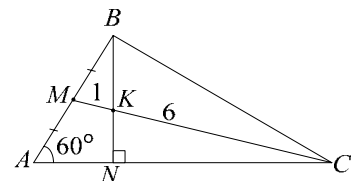


3. Įrodykite, kad

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

4. Kroso varžybose Jonas užėmė vidurinę vietą tarp visų dalyvių. Petras užėmė žemesnę, dešimtą, vietą, o Povilas atbėgo šešioliktas. Kiek bėgikų dalyvavo krose?

5. Trikampio  $ABC$  kampas  $BAC$  lygus  $60^\circ$ . Atkarpa  $CM$  yra trikampio pusiaukraštinė,  $BN$  – aukštinė, o  $K$  – jų susikirtimo taškas. Raskite kitus du trikampio  $ABC$  kampus, kai  $CK = 6$  ir  $KM = 1$ .



6. Sugalvokite tokį 8-ženklį skaičių, sudarytą iš skirtingų skaitmenų, kad išbraukus bet kuriuos du jo skaitmenis, gautasis 6-ženklis skaičius būtų sudėtinis.
7. Tegū  $a$  ir  $b$  yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys nelygybę  $a \cdot b > a + b$ . Įrodykite, kad  $a + b > 4$ .
8. Marius 5-ženklį skaičių padaugino iš jo skaitmenų sumos. Paskui tą patį padarė su gautu rezultatu. Atsakymas vėl buvo 5-ženklis skaičius. Koks buvo pradinis skaičius? Raskite visas galimybes.
9. Povilas turi juodų ir raudonų kortelių. Jis ima jas po vieną ir deda į dvi krūveles – raudoną ant juodos, o juodą ant raudonos. Negalima dėti kortelės ant tokios pačios spalvos kortelės. Dešimta ir vienuolikta kortelė buvo raudonos spalvos, o dvidešimt penkta – juodos spalvos. Kokios spalvos buvo 26-toji kortelė?
10. Kiškis, vilkas ir kiti miško gyventojai Naujųjų metų proga gavo 55 kankorėžius dovanų (nemažiau kaip po du). Vilkas nusprendė iš karto patikrinti, ar jie valgomi. Visi kiti kankorėžius išsaugojo iki kiškio gimtadienio ir ta proga padovanojo jam po pusę turimų kankorėžių. Dabar kiškis turėjo 10-kart daugiau kankorėžių negu iš pradžių. Kiek kankorėžių gavo vilkas?



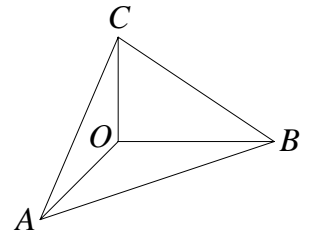
**PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ  
DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2008 m. lapkričio mėn. 28 d.  
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**U Ž D A V I N I A I  
VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS**

1. Tegu tiesių atkarpos  $OA$ ,  $OB$  ir  $OC$  yra tarpusavyje statmenos ir sudaro trisienį kampą su viršūne  $O$ . Įrodykite, kad trikampių  $ABC$ ,  $OAB$ ,  $OAC$  ir  $OBC$  plotai tenkina lygybę

$$S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OAC}^2 + S_{\Delta OBC}^2.$$



2. Tegu  $a$ ,  $b$  ir  $c$  yra kurio nors trikampio kraštinių ilgių. Įrodykite, kad
- $$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac).$$

3. Įrodykite, kad su visais  $n \geq 2$  galioja nelygybė

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

4. Išspręskite lygtį  $x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$ ,  $a$  – realusis skaičius.

5. Funkcija  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , tenkina šias sąlygas:  $f(1) = 1$ ,  $f(x+5) \geq f(x) + 5$ ,  $f(x+1) \leq f(x) + 1$ . Raskite funkcijos  $g(x) = f(x) + 1 - x$  reikšmę  $g(2008)$ .

6. Iš nelyginių natūraliųjų skaičių sudaryta tokia trikampė lentelė:

1							
3	5	7					
9	11	13	15	17			
19	21	23	25	27	29	31	

.....  
Nustatykite, koks skaičius yra 61-os eilutės viduryje.

7. Raskite visus natūraliųjų skaičių  $x$ ,  $y$  ir  $z$  trejetus  $(x; y; z)$ ,  $x \leq y \leq z$ , su kuriais galioja lygybė

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 3.$$

8. Raskite didžiausią natūralųjį skaičių  $n$ , kurio skaitmenų kubų suma didesnė už  $n$ .

9. Tarkime, kad daugianario  $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n$  koeficientai  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad nėra tokio skirtingų sveikųjų skaičių  $a, b$  ir  $c$  trejeto, su kuriuo galiotų visos trys lygybės:  $P(a) = b$ ,  $P(b) = c$  ir  $P(c) = a$ .

10. Mokinys sugalvojo nelyginį natūralųjį skaičių. Prie jo iš dešinės pusės prirašė dar vieną skaitmenį. Iš gautojo skaičiaus atėmė sugalvoto skaičiaus kvadratą ir gavo skaičių, 8 kartus didesnį už sugalvotąjį. Kokį skaičių mokinys sugalvojo ir kokį skaitmenį prie jo prirašė?