PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ ŠEŠTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

Pasvalys, 2004 m. lapkričio mėn. 26 d.

Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Raskite daugianarį su sveikaisiais koeficientais ir vienetiniu vyriausiuoju koeficientu, kurio šaknis yra skaičius $a = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.

Sprendimas. Pakėlę lygybę $a = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ kubu gauname

$$a^3 = \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)^3 = 3 + 3\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\sqrt[3]{2} + 2 = 5 + 3\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right) = 5 + 3\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{2}a.$$

Iš čia

$$\left(3\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{2}a\right)^3 = \left(a^3 - 5\right)^3.$$

Taigi

$$162a^3 = a^9 - 15a^6 + 75a^3 - 125 .$$

Ats.: Ieškomasis daugianaris yra $x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125$.

2. Įrodykite, kad nėra tokių sveikųjų skaičių *x* ir *y*, kurie tenkina lygtį

$$15x^2 - 7y^2 = 9 .$$

Įrodymas. Akivaizdu, kad skaičiai *x* ir *y*, tenkinantys duotą lygtį, turi būti dalūs iš 3. Tegu $x = 3k$ ir $y = 3l$. Tada

$$15k^2 - 7l^2 = 1 .$$

Kad tokių sveikųjų skaičių *k* ir *l* nėra, užtenka įrodyti, kad su bet kokiu sveikuoju skaičiumi *l* liekana dalijant $7l^2$ iš 15 nėra lygi 14. Aišku, tereikia patikrinti, kad

$$7l^2 \,(\mathrm{mod}\, 15) \neq 14 \text{ , kai } l = 1, 2, \ldots, 14.$$

Lengvai randame, kad tos liekanos yra skaičiai 7, 13, 3, 7, 10, 12, 13, 8, 12, 10, 7, 3, 13, 7; tarp jų nėra 14.

3. Kubas su nuspalvintomis sienomis supjaustomas į 1000 lygių kubelių, kurie supilami į urną. Iš urnos atsitiktinai ištraukiamas vienas kubelis. Raskite tikimybę, kad ištrauktasis kubelis turi dvi nuspalvintas sieneles.

Sprendimas. Pjaustant kubą su kiekviena jo briauna susiejami 8 kubeliai, kurių dvi sienelės yra nuspalvintos. Kadangi kubas turi 12 briaunų, tai iš viso bus $12 \times 8 = 96$ kubeliai, kurių dvi sienelės yra nuspalvintos. Tad ieškoma tikimybė yra lygi $\dfrac{96}{1000} = 0{,}096$.

Ats.: 0,096.

4. Laikrodžių meistras neapsižiūrėjęs sukeitė vietomis valandinę ir minutinę laikrodžio rodykles. Kiek kartų tarp pirmadienio 15 val. ir antradienio 15 val. laikrodis rodys tikslų laiką?

Sprendimas. Per *x* val. valandinė rodyklė nueina 5*x* padalų, minutinė – 60*x* padalų. Nesukeitus rodyklių praėjus *x* valandų po 15 val. minutinė rodyklė bus už $60x - 60(k-1)$ padalų nuo nulinės, jei $k - 1 \le x < k$, $k = 1, 2, \ldots, 24$. Po 24 val. ji bus nulinėje vietoje.

Valandinė rodyklė bus už $15 + 15x$ padalų, kai $0 \le x < 9$; už $15 + 15x - 60$ padalų, kai $9 \le x < 21$ ir už $15 + 15x - 120$ padalų, kai $21 \le x < 24$.

Sukeitus rodykles valandinė juda kaip minutinė rodyklė, o minutinė kaip valandinė. Nesunku suvokti, kad tikslų laiką matysime tik tada, kai abi rodyklės sutaps (bus vienodai nutolusios nuo nulinės padalos). Skaičiuodami rodyklių sutapimo momentus, išnagrinėkime šiuos atvejus.

a) $k-1 \le x < k$, $k=1,2,\dots,9$

Tikslaus laiko momentus randame iš lygties

$$60x-60(k-1)=15+5x \Rightarrow 55x=60k-45 \Rightarrow 11x=12k-9 \Rightarrow x=k-\frac{9-k}{11}.$$

Gauname 8 tikslaus laiko momentus, nes $k-1 \le x < k$, kai $k=1,2,\dots,8$.

b) $k-1 \le x < k$, $k=1,2,\dots,21$.

$$60x-60(k-1)=15+5x-60 \Rightarrow 11x=12k-21 \Rightarrow x=k-\frac{21-k}{11}.$$

Tinka $k=10,\dots,20$. Taigi tikslų laiką laikrodis rodys 11 kartų.

c) $k-1 \le x < k$, $k=22, 23, 24$.

$$55x=60k-165 \Rightarrow x=k-\frac{33-k}{11}.$$

Sąlygą $k-1 \le x < k$ tenkina $k=22, 23, 24$. Turime dar 3 tikslaus laiko momentus.

d) $x=24$

$0=5x-105 \Rightarrow x=21 \Rightarrow \varnothing$.

Taigi tikslus laikas bus rodomas $8+11+3=22$ kartus.

Ats. Laikrodis tikslų laiką rodys 22 kartus.

5. Raskite visus neneigiamų skaičių $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$ rinkinius, tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_{2004}=a, \\ x_1^2+x_2^2+\dots+x_{2004}^2=a^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^{2004}+x_2^{2004}+\dots+x_{2004}^{2004}=a^{2004}. \end{cases}$$

Sprendimas. Aišku, sistema neturi sprendinių, kai $a<0$. Kai $a \ge 0$, gauname:

$$a^2=x_1^2+x_2^2+\dots+x_{2004}^2=(x_1+\dots+x_{2004})^2-2x_1x_2-\dots-2x_1x_{2004}-\dots-2x_{2003}x_{2004}=$$
$$=a^2-2(x_1x_2+\dots+x_{2003}x_{2004}) \Rightarrow x_1x_2=0,\dots, x_1x_{2004}=0,\dots, x_{2003}x_{2004}=0.$$

Jei $x_1 \ne 0$, tai $x_2=x_3=\dots=x_{2004}=0$. Turime sprendinį $(a,0,\dots,0)$. Analogiškai gauname ir kitus sprendinius: $(0,a,\dots,0)$, …, $(0,0,\dots,a)$.

6. Tarkime, kad trikampio kraštinių ilgiai *a*, *b* ir *c* tenkina lygybę

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

Raskite kampą prieš kraštinę *b*.

Sprendimas.

$$\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow a^2+c^2=ac+b^2.$$

Pagal kosinusų teoremą

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \Rightarrow ac=2ac\cos B \Rightarrow \cos B=\frac{1}{2} \Rightarrow B=60^\circ.$$

Ats.: $\angle B=60^\circ$.

7. Skirtingi natūralieji skaičiai $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sudaro aritmetinę progresiją.

1. Tarę, kad bent vienas iš jų yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, įrodykite, kad tarp skaičių $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ yra be galo daug natūraliųjų skaičių kvadratų.
2. Ar gali atsitikti taip, kad nė vienas iš skaičių $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas?
3. Ar gali būti visi šios progresijos nariai natūraliųjų skaičių kvadratai?

Sprendimas. Šios aritmetinės progresijos skirtumą pažymėkime *d*. Akivaizdu, kad *d* yra natūralusis skaičius ir $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$.

1. Tarkime, $a_k = m^2$, $m \in \mathrm{N}$. Tada $a_{k+n} = a_k + nd = m^2 + nd$. Dabar visa paslaptis – parinkti „gerą“ n, pvz., $n = 2m + d$. Tada $a_{k+n} = m^2 + (2m + d)d = m^2 + 2md + d^2 = (m + d)^2$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Tokiu būdu „prigaminsime“ be galo daug natūraliųjų skaičių kvadratų.

2. Taip gali būti. Nagrinėkime atvejį, kai

$$a_n = 3n + 2,\ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Šių skaičių dalybos iš 3 liekana yra 2. Tuo tarpu dalydami iš 3 bet kurį natūraliojo skaičiaus kvadratą gauname liekaną 0 arba 1:

$$(3k)^2 = 9k^2 = 3M + 0,$$

$$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3M + 1$$

$$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3M + 1.$$

Tarkime, tokia progresija $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ egzistuoja. Pagal sąlygą turi galioti nelygybės: $a_0 \ge 1^2$, $a_1 \ge 2^2$, …, $a_n \ge (n+1)^2$ ir t. t. Tegu $a_n = m^2$., Tuomet $m \ge n$ progresijos skirtumas, $a_{n+1} \ge (m+1)^2$ ir $d = a_{n+1} - a_n \ge (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1 > 2n + 1$.

Gavome, kad d turi tenkinti nelygybę $d \ge 2n + 1$ su visais $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Betgi ši nelygybė negalioja, kai n pakankamai didelis. Taigi tokios aritmetinės progresijos negali būti.

8. Keturis skaičius A, B, C, D sudėjus po 2 visais įmanomais būdais, gautos sumos: 2003, 2004, 2005, 2007, 2008, 2009. Raskite skaičius A, B, C, D.

Sprendimas. Tegu $A \le B \le C \le D$. Galimi du atvejai.

1) $A + B \le A + C \le B + C \le A + D \le B + D \le C + D$

Išsprendę sistemą

$$\begin{cases} A + B = 2003, \\ A + C = 2004, \\ B + C = 2005, \\ A + D = 2007, \\ B + D = 2008, \\ C + D = 2009 \end{cases}$$

gauname $A = 1001$, $B = 1002$, $C = 1003$, $D = 1006$.

2) $A + B \le A + C \le A + D \le B + C \le B + D \le C + D$

Sudarę lygčių sistemą ir ją išsprendę, gausime $A = 1000$, $B = 1003$, $C = 1004$, $D = 1005$.

9. Skaičiai a, b, c yra teigiami ir tenkina lygybę $a + b + c = 1$. Įrodykite, kad

$$\frac{9}{4} \le \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} < \frac{5}{2}.$$

Įrodymas. Pirmiausia įrodykime kairiąją nelygybę. Pažymėkime

$$A = \frac{1}{1+a},\ B = \frac{1}{1+b},\ C = \frac{1}{1+c}.$$

Iš žinomų aritmetinių ir geometrinių vidurkių nelygybių gauname, kad

$$A + B + C \ge 3\sqrt[3]{ABC},$$

Iš čia

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{ABC}},$$

ir

$$(A + B + C)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) \ge 9,$$

Kadangi $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=3+(a+b+c)=4$, $A+B+C=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$, tai

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{9}{4}.$$

Dešiniajai nelygybei įrodyti galima pasinaudoti tokiu faktu: jei $x, y>0$, $x<y$, tai $\frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+z}$, kai z yra bet koks teigiamas skaičius.

Jį nesunku įrodyti: $\frac{x+z}{y+z}-\frac{x}{y}=\frac{z\,(y-x)}{y\,(y+z)}>0$.

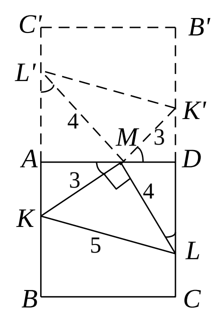
Tada $\frac{1}{1+a}<\frac{1+b+c}{1+a+b+c}$,

$\frac{1}{1+b}<\frac{1+a+c}{1+a+b+c}$,

$\frac{1}{1+c}<\frac{1+a+b}{1+a+b+c}$.

Panariui sudėję šias nelygybes gausime $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}<\frac{5}{2}$.

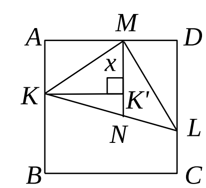
10. Duotas kvadratas *ABCD*. Taškas *M* yra kraštinės *AD* vidurio taškas. Kraštinėse *AB* ir *CD* atidėti taškai *K* ir *L*, taip kad $KM=3$, $LM=4$, $KL=5$. Raskite kvadrato *ABCD* kraštinės ilgį.



Pirmas sprendimo būdas. Pasinaudokime centrine simetrija taško *M* atžvilgiu. Nesunku įsitikinti, kad *KLK'L'* – rombas. Dviem būdais apskaičiavus jo plotą $S_{KLK'L'}=AD\cdot KL'=\frac{1}{2}LL'\cdot KK'$ gausime $AD\cdot 5=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6=24\Rightarrow AD=\frac{24}{5}$.

Antras sprendimo būdas. Galimi ir kiti sprendimo būdai. Pavyzdžiui, galima rasti *AK*.

Tegul taškas *N* yra *KL* vidurio taškas, tada $MN=KN=NL=2$, Apie statųjį trikampį *KLM* apibrėžto apskritimo spindulys yra *r*. Atkarpoje *MN* atidėkime tašką *K'* tokį, kad $MK'=AK=x$. *MN* yra trapecijos *AKLD* vidurio linija, taigi, *MN*||*AK*. Tada *AKK'M* yra stačiakampis. Statūs trikampiai *KMK'* ir *KNK'* turi bendrą kraštinę *KK'*, o pagal Pitagoro teoremą



$KK'^2=KM^2-MK'^2=KN^2-K'N^2$ arba $3^2+x^2=2{,}5^2-(2{,}5-x)^2\;\Rightarrow\;5x=3^2$,

$AK=x=\frac{3^2}{5}$. Tada pagal Pitagoro teoremą iš stataus trikampio *KMA* gauname

$$\frac{1}{2}AD=AM=\sqrt{KM^2-AK^2}=\sqrt{3^2-\frac{3^4}{5^2}}=\frac{12}{5}\Rightarrow AD=\frac{24}{5}.$$

Ats.: $\frac{24}{5}$.