PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ PENKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

(Jaunesniųjų klasių grupė)

Pasvalys, 2003 m. lapkričio mėn. 21 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Šeima susideda iš trijų asmenų: tėvo, motinos ir sūnaus. Šiuo metu jų amžių suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus ši suma buvo lygi 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?

Sprendimas. Sumų skirtumas $65-40=25$ nėra dalus iš 3. Vadinasi, prieš 9 metus sūnus dar nebuvo gimęs. Jei *x, y* ir *z* yra, atitinkamai, tėvo, motinos ir sūnaus amžiai šiuo metu, tai

$$x+y+z=65,$$
$$x+y=58,$$
$$x-4=9(z-4).$$

Iš čia $z=7,\ \ x=31,\ \ y=27$.

Ats.: Tėvas turi 31 metus, motina – 27 metus, o sūnus – 7 metus.

2. Supaprastinkite reiškinį $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$.

Sprendimas. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}=\dfrac{x^4+x^3+x^2-x^3+1}{x^2+x+1}=x^2-\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}=x^2-x+1.$

3. Tegu *a*, *b* ir *c* yra tokie skaičiai, jog $a+b+c=0$. Įrodykite, kad $ab+bc+ac\le 0$.

Įrodymas. Turime, jog $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ca)$.
Vadinasi, $ab+bc+ac\le 0$.

4. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios 1, 2 ir 3?

Sprendimas. Pažymėję a_1, a_2, a_3 kraštinių ilgius, atitinkančius aukštinėms 1, 2 ir 3, iš ploto formulės gausime

$$a_1=2a_2=3a_3=S,\ \text{ t.y. }\ a_1=S\,,\ a_2=\frac{S}{2}\,,\ a_3=\frac{S}{3}\,.$$

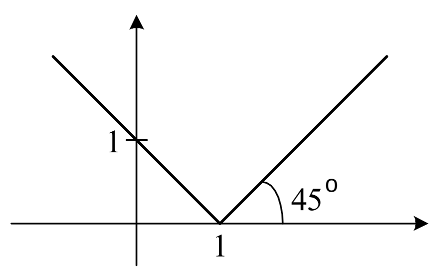
Turime $a_2+a_3=\dfrac{5}{6}S<a_1$. Tai prieštarauja trikampio nelygybei $a_2+a_3>a_1$.

Ats.: Tokio trikampio nėra.

5. Skaičiaus *x* absoliutinis didumas žymimas $|x|$. Naudodami absoliutinio didumo ženklą, užrašykite funkciją $y=f(x)$, kurios grafikas turi 1 paveiksle nurodytą pavidalą.

Sprendimas. Kadangi

$$y=\begin{cases}-x+1, & \text{kai } x\le 1,\\ x-1, & \text{kai } x>1,\end{cases}$$



1 pav.

tai

$$y=\begin{cases}-(x-1), \text{ kai } x-1\le 0,\\ x-1, \text{ kai } x-1>0;\end{cases}$$

taigi $y=|x-1|$.

6. Intervalas [0; 1] padalijamas į tris lygias dalis ir vidurinė atkarpa $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ išmetama. Po to dvi likusios atkarpos dalijamos į tris lygias dalis ir vėl išmetamos vidurinės dalys. Procesas kartojamas n kartų. Kokia likusių atkarpų ilgių suma?

Sprendimas. Kiekvieno padalijimo metu lieka $\frac{2}{3}$ buvusio ilgio. Todėl

$n=1 \Rightarrow \frac{2}{3}$,

$n=2 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^2}{3^2}$, ,

$n=3 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{2^2}{3^2}=\frac{2^3}{3^3}$, ,

ir t. t.

Ats.: $\frac{2^n}{3^n}$.

7. Pu yra kiniečių ilgio vienetas, o mu yra jų ploto vienetas. Stačiakampio lauko plotis 21 pu, o plotas $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$mu. Žinodami, kad 1 pu =2 žingsniams, 1 mu =240 pu^2, raskite lauko ilgį žingsniais.

Sprendimas. Lauko ilgis $\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{6}\right)\cdot 240 \text{ pu}^2}{21 \text{ pu}}=\dfrac{588}{21}\text{ pu}=28\text{ pu}=56$ žingsniai.

8. Viena lygiagretainio kraštinė ištempiama 20 %, o kita sutraukiama 20 %. Keliais procentais pasikeitė lygiagretainio plotas?

Sprendimas. Pradinis lygiagretainio plotas $S_1=xy\sin\alpha$, α – kampas tarp kraštinių. Gautojo lygiagretainio plotas $S_2=1{,}2x\cdot 0{,}8y\sin\alpha=0{,}96xy\sin\alpha$. Taigi plotas sumažėja 4 %.

9. Kiek yra natūraliųjų skaičių n $(1\le n\le 500)$, nesidalijančių nei iš 2, nei iš 3?

Sprendimas. 250 skaičių dalijasi iš 2, 166 iš 3 ir 83 iš 6. Taigi $250+166-83=333$ skaičiai dalijasi iš 2 arba 3. Nei iš 2, nei iš 3 nesidalija $500-333=167$ skaičiai.

Ats.: 167.

10. Sakykime, kad n-tieji kalendoriniai metai yra laimingi, jeigu skaičius $1^n+2^n+3^n+4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai?

Sprendimas. Užrašykime skaitmenis, kuriais baigiasi 1, 2, 3 ir 4 laipsniai bei tų skaitmenų sumos paskutinį skaitmenį:

$n=1$	1	2	3	4	0
$n=2$	1	4	9	6	0
$n=3$	1	8	7	4	0
$n=4$	1	6	1	6	4
$n=5$	1	2	3	4	0

Taigi $1^n+2^n+3^n+4^n$ nesidalija iš 5 tik tada, kai $n=4k$, $k\in$ N. Vadinasi, 2003 yra laimingi, o 2004 nelaimingi metai.

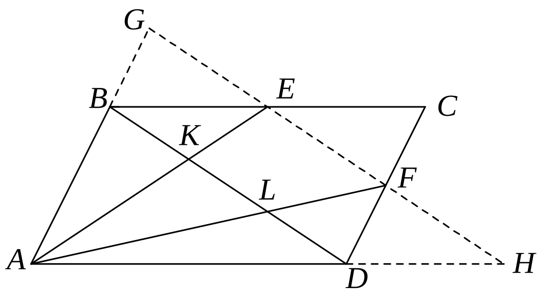
PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ PENKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

(Vyresniųjų klasių grupė)

Pasvalys, 2003 m. lapkričio mėn. 21 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Lygiagretainio $ABCD$ taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas, o F – kraštinės CD vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesės AE ir AF dalija įstrižainę BD į tris lygias dalis.



Įrodymas. Pažymėkime G ir H tiesės, einančios per taškus E ir F, susikirtimo taškus su , atitinkamai, tiesėmis AB ir AD. $\Delta DFH = \Delta ECF$, nes $\angle EFC = \angle DFH$, $\angle FEC = \angle FHD$ ir $DF = FC$.

Analogiškai $\Delta BGE = \Delta ECF$.

Taigi $GE = EF = FH$. ΔAGH panašus ΔABD, nes $GH \| BD$ (EF yra ΔBCD vidurio linija). Todėl $BK = KL = LD$.

2. Žinoma, kad daugianarį $p(x)$ dalijant iš $x+1$ gaunama liekana 1, o dalijant iš $x-1$ liekana yra 3. Kokia liekana bus dalijant $p(x)$ iš x^2-1?

Sprendimas. Turime $\dfrac{p(x)}{x^2-1} = \dfrac{ax+b}{x^2-1} + q(x).$ Todėl

$$\frac{p(x)}{x+1} = \frac{ax+b}{x+1} + (x-1)q(x) = a + \frac{b-a}{x+1} + (x-1)q(x);$$

iš čia išplaukia, kad $b-a=1$.

Analogiškai $\dfrac{p(x)}{x-1} = \dfrac{ax+b}{x-1} + (x+1)q(x) = a + \dfrac{b+a}{x-1} + (x+1)q(x)$, todėl $b+a=3$. Turime

$$\begin{cases} b-a=1, \\ b+a=3 \end{cases} \Rightarrow a=1,\ b=2.$$

Ats.: $x+2$.

3. Įrodykite, kad skaičius 2^k+1 nesidalija iš 7 su visais natūraliaisiais skaičiais k.

Įrodymas. Kai $k=3m$, tai $2^k+1=8^m+1$. Bet skaičiaus $8^m=(7+1)^m=7l+1$ liekana dalijant iš 7 yra 1.

Kai $k=3m+1$, tai $2^k+1=2^{3m+1}+1=2\cdot 8^m+1$. Skaičiaus $2\cdot 8^m=14l+2$ liekana dalijant iš 7 yra 2.

Kai $k=3m+2$, tai $2^k+1=4\cdot 8^m+1$. Skaičiaus $4\cdot 8^m=28l+4$ liekana dalijant iš 7 yra 4.

Taigi 2^k+1 liekana dalijant iš 7 yra 2, 3 arba 5.

4. Duota $m\times n$ lentelė su skaičiais, tenkinančiais sąlygą: kiekvienas skaičius lentelėje yra lygus kaimyninių skaičių aritmetiniam vidurkiui (keturių, jei skaičius yra lentelės viduje, trijų, jei jis yra lentelės pakraštyje, dviejų, jei skaičius yra lentelės kampe). Įrodykite, kad visi lentelėje esantys skaičiai yra lygūs.

Įrodymas. Imame didžiausią lentelėje esantį skaičių. Iš sąlygos išplaukia, kad visi kaimyniniai skaičiai būtinai lygūs didžiausiajam. Iš čia gauname, kad visi skaičiai lygūs.

5. Įrodykite, kad tarp visų vienodo perimetro P trikampių maksimalų plotą turi lygiakraštis trikampis.

Įrodymas. Tegu $p = \frac{P}{2}$. Trikampio plotas

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \le \sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3} = \sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Lygiakraščiam trikampiui galioja lygybės $a = b = c = \frac{2}{3}p$. Jo plotas $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = p^2 \frac{4}{9}\frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

6. Šeima susideda iš trijų asmenų: tėvo, motinos ir sūnaus. Šiuo metu jų amžių suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus ši suma buvo lygi 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?

Sprendimas. Sumų skirtumas $65 - 40 = 25$ nėra dalus iš 3. Vadinasi, prieš 9 metus sūnus dar nebuvo gimęs. Jei *x, y* ir *z* yra, atitinkamai, tėvo, motinos ir sūnaus amžiai šiuo metu, tai

$$x + y + z = 65,$$
$$x + y = 58,$$
$$x - 4 = 9(z - 4).$$

Iš čia $z = 7,\ \ x = 31,\ \ y = 27$.

Ats.: Tėvas turi 31 metus, motina – 27 metus, o sūnus – 7 metus.

7. Raskite sumą $S = f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2}{2003}\right) + \ldots + f\left(\frac{2002}{2003}\right)$, jei $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $f(1-x) = \frac{9^{1-x}}{3+9^{1-x}} = \frac{9}{3\cdot 9^x + 9} = \frac{3}{3+9^x}$, todėl

$$f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{3+9^x} + \frac{3}{3+9^x} = 1.$$

Taigi

$$S = f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2}{2003}\right) + f\left(1 - \frac{2}{2003}\right) + \ldots + f\left(\frac{1001}{2003}\right) + f\left(1 - \frac{1001}{2003}\right) = 1001.$$

8. Žymėkime $a * b = a^b$. Raskite $\frac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$.

Sprendimas. $\frac{2*16}{16*2} = \frac{2^{16}}{16^2} = \frac{2^{16}}{2^8} = 2^8 = 256.$

9. Sakykime, kad *n*-tieji kalendoriniai metai yra laimingi, jeigu skaičius $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai?

Sprendimas. Užrašykime skaitmenis, kuriais baigiasi 1, 2, 3 ir 4 laipsniai bei tų skaitmenų sumos paskutinį skaitmenį:

$n = 1$	1 2 3 4 0	$n = 4$	1 6 1 6 4
$n = 2$	1 4 9 6 0	$n = 5$	1 2 3 4 0
$n = 3$	1 8 7 4 0		

Taigi $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ nesidalija iš 5 tik tada, kai $n = 4k,\ k \in \mathrm{N}$. Vadinasi, 2003 yra laimingi, o 2004 nelaimingi metai.

10. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios 1, 2 ir 3?

Sprendimas. Pažymėję a_1, a_2, a_3 kraštinių ilgius, atitinkančius aukštinėms 1, 2 ir 3, iš ploto formulės gausime $a_1 = 2a_2 = 3a_3 = S$, t.y. $a_1 = S$, $a_2 = \frac{S}{2}$, $a_3 = \frac{S}{3}$. Turime $a_2 + a_3 = \frac{5}{6}S < a_1$. Tai prieštarauja trikampio nelygybei $a_2 + a_3 > a_1$.

Ats.: Tokio trikampio nėra.