PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS ANTROJI KOMANDINĖ OLIMPIADA

PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I Ų   S P R E N D I M A I

Pasvalys, 2000 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Tarkime, kad $u_1 = u_2 = 1,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n \geq 3,\ a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n},\ n \geq 1.$ Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$

$$1 \leq a_n \leq 2,$$

$$|a_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1};$$

čia α yra aukso pjūvio santykis, t. y. $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha},\ \alpha > 0.$

Įrodymas. $u_1 = u_2 = 1,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n \geq 3 \Rightarrow u_n \geq 1,\ \forall n \in N \Rightarrow u_{n+1} = u_n + u_{n-1} > u_n + 1,$ $n \geq 2,\ a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{u_n + 1}{u_n} > 1,$ kai $n \geq 2.$ Be to, $\dfrac{u_2}{u_1} = 1 \geq 1.$ Taigi $a_n \geq 1$ su visais $n \in N.$

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Imkime

$$a_n - \alpha = \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - a_{n-1}}{\alpha a_{n-1}}.$$

Kadangi $a_{n-1} \geq 1,$ tai

$$|a_n - \alpha| = \frac{|\alpha - a_{n-1}|}{\alpha a_{n-1}} \leq \frac{|\alpha - a_{n-1}|}{\alpha} = \frac{|a_{n-1} - \alpha|}{\alpha}.$$

Analogiškai $|a_{n-1} - \alpha| \leq \dfrac{|a_{n-2} - \alpha|}{\alpha}$ ir t. t.

Turime $|a_n - \alpha| = \dfrac{|a_{n-1} - \alpha|}{\alpha} \leq \dfrac{|a_{n-2} - \alpha|}{\alpha} \leq \ldots \leq \dfrac{a_1 - \alpha|}{\alpha^{n-1}} = \dfrac{|\alpha - 1|}{\alpha^{n-1}}.$

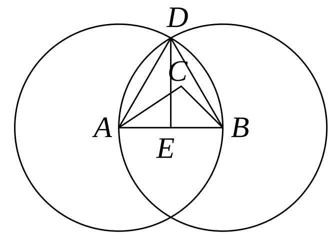
Bet $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha},$ todėl $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ ir $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2},\ \alpha - 1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2},\ |\alpha - 1| = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} < \dfrac{3 - 1}{2} = 1.$

Todėl

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{\alpha^{n-1}}.$$

2. Įrodykite, kad jeigu trikampio ilgiausioji kraštinė trumpesnė už 3, tai to trikampio plotas mažesnis už 4.

Įrodymas. AB yra ilgiausioji kraštinė, todėl taškas C yra skritulių su centrais taškuose A ir B ir spindulio $|AB|$ viduje. Šie apskritimai susikerta taške D ir ΔABD yra lygiakraštis ΔABC ir ΔABD pagrindai sutampa ΔABD aukštinė DE ilgesnė už ΔABC aukštinę. Todėl



$$S_{\Delta ABC} < S_{\Delta ABD} = |AB|^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} < 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} < 4.$$

3. n lygiagrečiųjų plokštumos tiesių kerta kitas m lygiagrečiąsias plokštumos tieses. Kiek lygiagretainių yra gautame tinkle?

Sprendimas. Kiekvienas lygiagretainis gaunasi bet kurių dviejų pirmojo tiesių rinkinio ir bet kurių dviejų antrojo tiesių rinkinio susikirtime

Pirmajame rinkinyje skirtingų porų yra $\frac{n(n-1)}{2}$, antrajame – $\frac{m(m-1)}{2}$.

Taigi yra $\frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$ lygiagretainių.

Ats.: $\frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$.

4. Raskite lygties

$$(x^2+ax)^2+b(x^2+ax)+c=0$$

šaknų kvadratų sumą.

Sprendimas. $y = x^2 + ax.$

$y^2+by+c=0,\ \ y_1+y_2=-b,\ \ y_1 \cdot y_2 = c.$

$$\begin{cases} x^2+ax-y_1=0, \\ x^2+ax-y_2=0; \end{cases}$$

$x_1 \cdot x_2 = -y_1,\ \ x_3 \cdot x_4 = -y_2;$

$x_1+x_2=-a,\ \ x_3+x_4=-a.$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=2a^2+2(y_1+y_2)=2a^2-2b.$

Ats.: $2a^2-2b.$

5. Tarkime, kad $0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$. Įrodykite, kad

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n} < \mathrm{tg}\,\alpha_n.$$

Įrodymas. $\mathrm{tg}\,\alpha_1 < \mathrm{tg}\,\alpha_i < \ldots < \mathrm{tg}\,\alpha_n \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha_1 \cdot \cos\alpha_i < \sin\alpha_i < \mathrm{tg}\,\alpha_n \cdot \cos\alpha_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha_1(\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n) < \sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_n < \mathrm{tg}\,\alpha_n(\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n).$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n} < \mathrm{tg}\,\alpha_n.$$

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}(y^2+6)(x-1)=(x^2+1)y,\\(x^2+6)(y-1)=(y^2+1)x.\end{cases}$$

Sprendimas.

$$\begin{cases}y^2x-y^2+6x-6-x^2y-y=0,\\x^2y-x^2+6y-6-y^2x-x=0.\end{cases}$$

Atimame ir sudedame kaires bei dešines puses. Gauname:

$$\begin{cases}xy(y-x)+(x-y)(x+y)-xy(x-y)+7(x-y)=0,\\xy(x+y)-y^2-x^2+6(x+y)-12-xy(x+y)-x-y=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-y)(x+y-2xy+7)=0,\\5(x+y)-x^2-y^2-12=0.\end{cases} \qquad (1)$$

1) $x=y.$ Tada (1):

$$10x-2x^2-12=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=3,\ y_1=2,\ y_2=3.$$

Sprendinys yra (2; 2) ir (3; 3).

2) Ieškome sprendinių $(x;\,y):\ x\neq y.$

$$\begin{cases}x+y-2xy+7=0,\\5(x+y)-(x+y)^2+2xy-12=0.\end{cases}$$

$u=x+y,\ \ v=xy.$

$$\begin{cases}u-2v+7=0,\\5u-u^2+2v-12=0;\end{cases}$$

$u=2v-7.$

$10v-35-4v^2+28v-49+2v-12=0,\ \ 4v^2-40v+96=0,\ \ v^2-10v+24=0;\ \ v_1=4,\ \ v_2=6.$

Tada $u_1=1,\ \ u_2=5.$ Gauname du sprendinius: (2; 3), (3; 2).

Ats.: (2; 2), (3; 3), (2; 3), (3; 2).

7. Išspręskite lygtį

$$\left[\frac{1-3x}{2}\right]=x^2-2x;$$

čia $[a]$ yra skaičiaus a sveikoji dalis.

Sprendimas. $x^2-2x=n \Rightarrow x=1\pm\sqrt{n+1},\ \ n\geq -1,$

$$\begin{cases}\dfrac{1-3x}{2}-1\leq x^2-2x,\\[2mm]\dfrac{1-3x}{2}-1\geq x^2-2x;\end{cases} \qquad \begin{array}{l}2x^2-x+1\geq 0.\\2x^2-x-1\leq 0;\end{array} \qquad -\frac{1}{2}\leq x\leq 1.$$

$$\begin{array}{l}1+\sqrt{1+n}:\quad n=-1\\1-\sqrt{1+n}:\quad n=-1,\,0,\,1\end{array} \Rightarrow\ 0,1,1-\sqrt{2}.$$

Ats.: $0,1,1-\sqrt{2}.$

8. Raskite lygties

$$x^2y^2 = x^2 + xy + y^2$$

sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. $x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \geq 2xy + xy = 3xy,$

$x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \geq -2xy + xy = -xy;$

$z = xy.$

$$\begin{cases} z^2 - 3z \geq 0, \\ z^2 + z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z \geq 3, \ \ z = 0, \\ z \leq -1. \end{matrix}$$

$z = 0$: $xy = 0$. $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Sprendinys (0; 0).

$z \geq 3$. Lygtį užrašome

$(x+y)^2 = xy(xy+1).$

$(x+y)^2 = z(z+1) \Rightarrow z^2 < (x+y)^2 < (z+1)^2$, $x+y$ negali būti sveikas.

$z < -1$: $(x+y)^2 = -z(-z-1),$

$(-z-1)^2 < (x+y)^2 < (-z)^2$, $x+y$ yra sveikas.

$z = 0$: $(x+y)^2 = 0,$

$x + y = 0,$

$x = -y.$

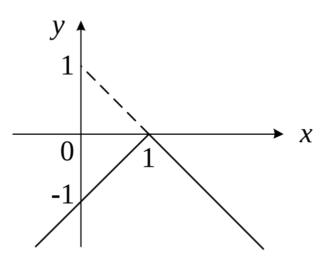
$x^4 = x^2,$

$x^2(x^2 - 1) = 0,$

$x = 0$, $x = \pm 1$; $y = 0$, $y = \pm 1$.

Ats.: (0; 0), (1; -1), (-1; 1).

9. Nubrėžkite funkcijos $y = \min(x-1, 1-x)$ grafiką. Užrašykite šią funkciją, naudodami modulio ženklą.



Sprendimas. $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 1-x, & x-1 > 1-x \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 1-x, & x > 1. \end{cases}$

$y = -|x-1| = \begin{cases} 1-x, \text{ kai } x \geq 1, \\ x-1, \text{ kai } x < 1. \end{cases}$

Ats.: $y = -|x-1| = \begin{cases} 1-x, \text{ kai } x \geq 1, \\ x-1, \text{ kai } x < 1. \end{cases}$

10. Duoti skaičiai $x_1, x_2, \dots, x_n$ ir $\overline{x_n} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Tarkime, kad $x_{n+1} = \overline{x_n}$. Kas didesnis: $\overline{x_n}$ ar $\overline{x_{n+1}} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n+1}$?

Sprendimas. $\dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \dfrac{n\bar{x} + \bar{x}}{n+1} = \bar{x}.$ Vienodi.

Ats.: Vienodi.

Vyresniųjų moksleivių grupė

PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS ANTROJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

Pasvalys, 2000 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

V.1. Apskritimo skersmens galuose parašyti vienetai. Gautų pusapskritimių vidurio taškuose rašoma du (pirmas žingsnis). Po to kiekvienas iš keturių gautų lankų dalijamas pusiau ir jo viduryje rašomas skaičius lygus sumai skaičių, stovinčių to lanko galuose (antras žingsnis). Tokia operacija kartojama n kartų. Raskite visų užrašytų skaičių sumą.

Sprendimas. Tarkime, kad po l-ojo žingsnio tarp vienetų iš vienos pusės yra skaičiai $k_1, \dots, k_r$. Tada visų skaičių suma yra $2(1+k_1+\dots+k_r)$. Po $(l+1)$-ojo žingsnio bus

$$2(1+k_1+\dots+k_r)+2\{(1+k_1)+(k_1+k_2)+\dots+(k_{r-1}+k_r)+(k_r+1)\}=3(1+k_1+\dots+k_r).$$

Taigi suma patrigubėja.

Po pirmo žingsnio suma buvo $1+2+2+1=6=2\cdot3$. Todėl po 2-ojo žingsnio ji bus $2\cdot3\cdot3=2\cdot3^2$, po 3-ojo $2\cdot3^3$ ir t.t. Po n-ojo žingsnio ji bus $2\cdot3^n$.

V.2. Tegu $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+n$, $n\geq2$. Įrodykite, kad $a_n+a_{n+1}=(n+1)^2$.

Sprendimas. Naudojame matematinę indukciją.

Kai $n=1$, tai $a_1+a_2=1+(1+2)=1+3=4=2^2$. Tegu $a_{n-1}+a_n=n^2$. Tada

$$a_n+a_{n+1}=a_{n-1}+n+a_n+n+1=(a_{n-1}+a_n)+2n+1=n^2+n+1=(n+1)^2.$$

V.3. Įrodykite, kad $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

Sprendimas.

$$2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}\right)-\left(\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}\right)+\left(\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}\right)=$$

$$=\cos\frac{\pi}{14}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

V.4. Išspręskite lygčių sistemą $x^5-y^5=x^3-y^3=x-y$.

Sprendimas. Iškeliame $(x-y)$ iš visų lygybių pusių:

$$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=(x-y)(x^2+xy+y^2)=x-y.$$

1) Taškai $(a;a)$, $a\in\mathrm{R}$ tenkina lygtį.

Ieškom sprendinių $(x;y)$ tokių, kad $x\neq y$. Tada sprendžiame lygčių sistemą

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=x^2+xy+y^2=1$$

arba

$$x^2(x^2+xy+y^2)+xy^3+y^4=x^2+xy+y^2=1.$$

Kairėje pusėje x^2+xy+y^2 galima pakeisti 1 ir turėsime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 + xy^3 + y^4 = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Atimame:

$xy\,(y^2 - 1) + y^2 (y^2 - 1) = 0$,

$(y^2 - 1)(xy + y^2) = 0$,

$y\,(y^2 - 1)(x + y) = 0$.

2) $y = 0$. Įstatę į (1), turime $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.
Sprendiniai: (1; 0), (–1; 0).

3) $y^2 = 1$. Kai $y = 1$, tai įstatę į (1), turime
$x^2 + x + 1 = 1$, t.y. $x(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ arba $x=-1$.
Sprendiniai: (0; 1), (–1; 1).

Kai $y = -1$, tai įstatę į (1), turime $x^2 - x + 1 = 1$, t.y.
$x\,(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ arba $x = 1$.
Sprendiniai: (0; –1), (1; –1).

4) $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$. Įstatę į (1): $x^2 - x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.
Sprendiniai: (1; –1), (–1; 1).

Ats.: (1; 0), (–1; 0), (0; 1), (0; –1), (1; –1), (–1; 1) ir $(a; a)$, $a \in R$.

V. 5. Trikampio ABC plotas $S = a^2 - (b - c)^2$
(a, b, c – to trikampio kraštinių ilgiai). Raskite kampą A.

Sprendimas. $S = \frac{1}{2} bc \sin A = a^2 - (b - c)^2 = (a^2 - b^2 - c^2) + 2bc =$
$= (\text{kosinusų teorema}) = -2bc \cos A + 2bc = 2bc\,(1 - \cos A)$.

Turime $\frac{1}{4} \sin A = 1 - \cos A$.

$\frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow A = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$.

V 6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2\cos^2 \dfrac{y^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}, \\ |x + y| \le 6. \end{cases}$$

Sprendimas. $2\cos^2 \frac{y^2 + x}{6} \le 2$; $2^x + 2^{-x} \ge 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$.

Lygybė, kai $2^x = 2^{-x}$, t.y. $x = 0$

$\frac{y^2 + x}{6} = k\pi \Rightarrow y = \pm\sqrt{6k\pi}$

$|y| \le 6 \Rightarrow$ tinka $k = 0, 1$

Ats.: $(0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{6\pi})$.

V. 7. Banke padėdama 1000 litų. Pinigai atsiimami po 10 metų. Kada gaunama daugiau palūkanų: ar kiekvienų metų gale pridedant 5 % nuo turimos sumos, ar kiekvieno mėnesio gale pridedant 5/12 % nuo turimos sumos?

Sprendimas. Skaičiuojant palūkanas kiekvienų metų gale, po 10 metų bus

$$1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} \text{ litų.}$$

Skaičiuojant palūkanas kiekvieno mėnesio gale, po 10 metų bus

$$1000\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{120} \text{ litų.}$$

Reikia palyginti $1+\dfrac{5}{100}$ ir $\left(1+\dfrac{5}{1200}\right)^{12}$. Bet

$$\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{12}=\left(1+\frac{5}{1200}\right)\left(1+\frac{5}{1200}\right)\dots\left(1+\frac{5}{1200}\right)=1+12\cdot\frac{5}{1200}+\dots+\left(\frac{5}{1200}\right)^{12}>1+\frac{5}{100}.$$

Ats. Skaičiuojant palūkanas kiekvieno mėnesio gale pelnas bus didesnis.

V. 8. Išspręskite lygtį $\left|x^2+3x\right|=\left|2x-6\right|$.

Sprendimas.

a) $x^2+3x=2x-6$, $x^2+x+6=0$, $D<0$, sprendinių nėra.

b) $x^2+3x=6-2x$, $x^2+5x-6=0$, $x_1=1$, $x_2=-6$.

Ats.: 1 ir –6.

V. 9. Įrodykite, kad su visais $a\neq 0$

$$1+\frac{1}{a^2}\geqslant\frac{2}{a}-\frac{11}{25a^2}+\frac{2}{5a}.$$

Sprendimas. $1+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{a}+\dfrac{11}{25a^2}-\dfrac{2}{5a}=\dfrac{25a^2+25-50a+11-10a}{25a^2}=\dfrac{25a^2-60a+36}{25a^2}=$

$=\dfrac{(5a-6)^2}{25a^2}\geqslant 0$, jei $a\neq 0$.

V. 10. $S(n)$ yra skaičiaus n skaitmenų suma. Ar egzistuoja tokie natūralieji skaičiai a, b, c, kad $S(a+b)<5$, $S(a+c)<5$, $S(b+c)<5$, bet $S(a+b+c)>50$?

Sprendimas. Egzistuoja, pavyzdžiui,

$a=4\,5\,5\,4\,5\,5\,4\,5\,5\,5$,
$b=5\,5\,4\,5\,5\,4\,5\,5\,4\,5$,
$a=5\,4\,5\,5\,4\,5\,5\,4\,5\,5$.

Pastebėkime, kad kiekviename stulpelyje yra du penketai ir vienas ketvertas (išskyrus paskutinį stulpelį) ir ketvertas slenka.

b+c = 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0, $S(b+c)=4<5$;
a+b = 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0, $S(a+b)=4<5$;
a+c = 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0, $S(a+c)=4<5$;
a+b+c = 1 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5, $S(a+b+c)=51>50$.