



PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS
TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

UŽDAVINIAI

Pasvalys, 2000 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Tarkime, kad $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 3$, $\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $n \geq 1$. Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$

$$1 \leq \alpha_n \leq 2, \quad |\alpha_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1};$$

čia α yra aukso pjūvio santykis, t. y. $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$.

2. Įrodykite, kad jeigu trikampio ilgiausioji kraštinė trumpesnė už 3, tai to trikampio plotas mažesnis už 4.
3. n lygiagrečiųjų plokštumos tiesių kerta kitas m lygiagrečiąsias plokštumos tieses. Kiek lygiagretainių yra gautame tinkle?
4. Rasti lygties $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$ šaknų kvadratų sumą.
5. Tarkime, kad $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Įrodykite, kad $\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$.

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = (x^2 + 1)y, \\ (x^2 + 6)(y - 1) = (y^2 + 1)x. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygtį $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x$; čia $[a]$ yra skaičiaus a sveikoji dalis.

8. Raskite lygties $x^2 y^2 = x^2 + xy + y^2$ sveikuosius sprendinius.

9. Nubrėškite funkcijos $y = \min(x - 1, 1 - x)$ grafiką. Užrašykite šią funkciją, naudojant modulio ženklą.

10. Duoti skaičiai x_1, x_2, \dots, x_n ir $\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Tarkime, kad $x_{n+1} = \bar{x}_n$. Kas didesnis:

$$\bar{x}_n \text{ ar } \bar{x}_{n+1} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n} ?$$



PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS
TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

UŽDAVINIAI

Pasvalys, 2000 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Apskritimo skersmens galuose parašyti vienetai. Gautų pusapskritimių vidurio taškuose rašoma du (pirmas žingsnis). Po to kiekvienas iš keturių gautų lankų dalijamas pusiau ir jo viduryje rašomas skaičius lygus sumai skaičių, stovinčių to lanko galuose (antras žingsnis). Tokia operacija kartojama n kartų. Raskite visų užrašytų skaičių sumą.

2. Tegū $\alpha_1 = 1$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} + n$, $n \geq 2$. Įrodykite, kad $\alpha_n + \alpha_{n+1} = (n+1)^2$.

3. Įrodykite, kad $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$x^5 - y^5 = x^3 - y^3 = x - y.$$

5. Trikampio ABC plotas $S = a^2 - (b-c)^2$ (a, b, c – to trikampio kraštinių ilgių). Raskite kampą A .

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2 \cos^2 \frac{y^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}, \\ |x + y| \leq 6. \end{cases}$$

7. Banke padedama 1000 litų. Pinigai atsiimami po 10 metų. Kada gaunama daugiau palūkanų: ar kiekvienų metų gale pridodant 5 % nuo turimos sumos, ar kiekvieno mėnesio gale pridodant 5/12 % nuo turimos sumos?

8. Išspręskite lygtį

$$|x^2 + 3x| = |2x - 6|.$$

9. Įrodykite, kad su visais $a \neq 0$

$$1 + \frac{1}{a^2} \geq \frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}.$$

10. $S(n)$ yra skaičiaus n skaitmenų suma. Ar egzistuoja tokie natūralieji skaičiai a, b, c , kad $S(a+b) < 5$, $S(a+c) < 5$, $S(b+c) < 5$, bet $S(a+b+c) > 50$?