PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS PIRMOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA

PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 1999 m. lapkričio mėn. 26 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

R E Z U L T A T A I

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Viso	Vieta
1. Biržų „Saulės“ gimnazija	–	5+3	4	5+1	5+1	–	–	–	1	–	25	2
2. Pasvalio 2-oji vidurinė mokykla	–	3	4	2	–	–	–	–	0	–	9	6
3. Pušaloto vidurinė mokykla	–	3	3	1	–	–	–	1	1	1	10	4-5
4. Vaškų vidurinė mokykla	–	1	3	2	–	0	0	–	0	–	6	7
5. Pumpėnų vidurinė mokykla	1	–	3	–	–	–	–	–	1	–	5	8
6. Joniškėlio vidurinė mokykla	1	1	3	2	1	0	–	–	1	1	10	4-5
7. Pasvalio P.Vileišio vid.m. I kom.	1	1	1	1	–	0	–	–	0	–	4	9
8. Pasvalio P.Vileišio vid.m.II kom.	**0**	**2**	**5+3**	**5+1**	**5+1**	**5+3**	**–**	**1**	**2**	**–**	**33**	**1**
9. Pasvalio P.Vileišio vid.m.III kom.	–	2	4	5+1	5+1	1	-	1	1	0	21	3

Vertinimo komisijos pirmininkas
Habil. dr. doc. Vilijandas Bagdonavičius

U Ž D A V I N I A I

1. Įrodykite, kad $\cos 18^\circ = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

2. Kokius skaitmenis reikia įrašyti vietoj *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, kad keturženkliai skaičiai *BCDE* ir *AFCB* tenkintų sąlygą $A = \dfrac{BCDE}{AFCB}$, $A > 2$?

3. Namų, esančių tarp dviejų gretimų sankryžų, vienos gatvės pusės numerių suma lygi 33. Raskite tuos numerius.

4. Nustatykite, su kokiomis realiosiomis *a* reikšmėmis lygtys $x^3 + ax + 1 = 0$ ir $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ turi bendrų realiųjų šaknų.

5. Įrodykite, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais

$$\max\,(x;\, y) = \frac{1}{2}(|x - y| + x + y);$$

čia $\max(x;\, y)$ yra didžiausias iš skaičių *x* ir *y*.

6. Įrodykite, kad funkcija $y = f(x)$, tenkinanti sąlygą

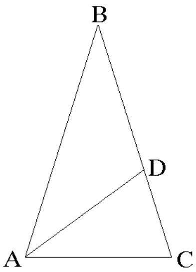
$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \quad x \in \mathrm{R}$$

yra periodinė.

7. Įrodykite, kad

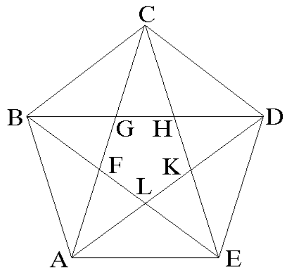
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

8. Lygiašonis trikampis *ABC* yra vadinamas **tauriuoju**, jei pusiaukampinė *AD* kerta šoninę kraštinę *BC* aukso pjūviu, t.y. $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|BD|}$ (žr. 1 brėž.). Įrodykite, kad visi taurieji trikampiai yra panašūs ir raskite jų kampus.



1 brėž.

9. Tegul taisyklingojo penkiakampio *ABCDE* įstrižainių susikirtimo taškai yra *F*, *G*, *H*, *K* ir *L* (žr. 2 brėž.). Įrodykite, kad trikampiai *ACE*, *EAK* ir *LAF* yra taurieji. Kiek iš viso tauriųjų trikampių yra 2 brėžinyje?



2 brėž.

10. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_2}}, \\ x_2 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_3}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_1}}. \end{cases}$$

U Ž D A V I N I Ų   S P R E N D I M A I

1. Įrodykite, kad $\cos 18^\circ = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Sprendimas. sin 18°cos 18°cos 36°= $\frac{1}{4}$ sin 72°= $\frac{1}{4}$ cos 18° $\Rightarrow$ sin 18°cos 36°= $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sin 18°(1–2 sin^{2}18°)= $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ sin 18° yra lygties $8x^3-4x+1=0$ šaknis. Išskaidome: $8x^3-4x+1=2x(4x^2-1)-(2x-1)=(2x-1)(4x^2+2x-1)$. Lygties šaknys: $\frac{1}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Tinka $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ $\Rightarrow$ sin 18° = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

2. Kokius skaitmenis reikia įrašyti vietoj *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, kad keturženkliai skaičiai *BCDE* ir *AFCB* tenkintų sąlygą $A=\dfrac{BCDE}{AFCB}$, $A>2$?

Sprendimas. *BCDF* = *A* · *AFCB* $\Rightarrow$ A^2<10 $\Rightarrow$ *A*≤ 3 $\Rightarrow$*A* = 3;

BCDE = 3·3*FCB* $\Rightarrow$ *B* = 9; 9*CDE* = 3·3*FC* 9 $\Rightarrow$ *E* = 7;

9*CD* 7 = 3·3*FC* 9 $\Rightarrow$ 100*C*+10*D*+7 = 3(100*F*+10*C*+9) $\Rightarrow$

100*C*+10*D* = 3(100*F*+10*C*)+20 $\Rightarrow$ 10*C*+*D* = 3(10*F* +*C*)+2;

10*C*+*D* ≤ 99 $\Rightarrow$ 30*F*+3*C*+2 ≤ 99 $\Rightarrow$ *F* ≤ 3. Bet *A*=3, todėl *F* ≤ 2.

Jei *F* =0, tai *D* = 2–7*C* $\Rightarrow$ *C*=0, *D*=2. Gavome *F* =*C* = 0. Netinka.

Jei *F* =1, tai *D* = 32–7*C* $\Rightarrow$ *C*=4, *D*=2. Netinka.

Jei *F* =2, tai *D* = 62–7*C* $\Rightarrow$ *C*=8, *D*=6. 3289·3 = 9867.

3. Namų, esančių tarp dviejų gretimų sankryžų, vienos gatvės pusės numerių suma lygi 33. Raskite tuos numerius.

Sprendimas. Jei *n* namų, pirmo numeris *a*, tai

$$a+(a+2)+\ldots+(a+2(n-1))=33,$$

$$\frac{2a+2(n-1)}{2}n=33,$$

$$(a+n-1)n=33,$$

$$a\geq 1\Rightarrow n^2\leq 33\Rightarrow n\leq 5;$$

n nelyginis, todėl $n=1,3,5$. $n=1$ netinka, $n=5$ netinka. $n=3\Rightarrow a=9$.

Ats. 9, 11, 13.

4. Nustatykite, su kokiomis realiosiomis *a* reikšmėmis lygtys $x^3+ax+1=0$ ir $x^4+ax^2+1=0$ turi bendrų realiųjų šaknų.

Sprendimas. Jei x_0 yra abiejų lygčių šaknis, tai

$$\begin{cases} x_0^3+ax_0+1=0, \\ x_0^4+ax_0^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^4+ax_0^2+x_0=0, \\ x_0^4+ax_0^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow x_0-1=0 \Rightarrow x_0=1 \Rightarrow 1+a+1=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a=-2.$

5. Įrodykite, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais

$$\max(x;\,y)=\frac{1}{2}(|x-y|+x+y);$$

čia $\max(x;\,y)$ yra didžiausias iš skaičių *x* ir *y*.

Sprendimas. Jei $x \ge y$, tai $x=\frac{1}{2}(x-y+x+y)$ teisinga.

Jei $x<y$, tai $x=\frac{1}{2}(y-x+x+y)$ teisinga.

6. Įrodykite, kad funkcija $y=f(x)$, tenkinanti sąlygą

$$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},\quad x\in \mathrm{R}$$

yra periodinė.

Sprendimas.

$$f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x+4a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x).$$

7. Įrodykite, kad

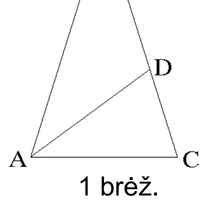
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Sprendimas. $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \Rightarrow x^2=1+x \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x=0{,}5\pm\sqrt{1{,}25}$, $0{,}5-\sqrt{1{,}25}$ netinka $\Rightarrow x=0{,}5+\sqrt{1{,}25}$.

$$y=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} \Rightarrow y-1=\frac{1}{y} \Rightarrow y^2-y-1=0 \Rightarrow y=0{,}5+\sqrt{1{,}25}.$$

$x=y$.

8. Lygiašonis trikampis *ABC* yra vadinamas **tauriuoju**, jei pusiaukampinė *AD* kerta šoninę kraštinę *BC* aukso pjūviu, t.y. $\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|BC|}{|BD|}$ (žr. 1 brėž.). Įrodykite, kad visi taurieji trikampiai yra panašūs ir raskite jų kampus.



1 brėž.

Sprendimas. $BD^2=BC\cdot DC \Rightarrow BD^2=BC(BC-BD)$;

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{BD}-1$$

$x = \frac{BD}{BC} \Rightarrow x = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Tinka $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\angle ACB = \alpha$, $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ADB = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle ABC = \pi - 2\alpha$.

$$\frac{BD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \frac{BC}{\sin\frac{3}{2}\alpha} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{1}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{3 - 2(1-\cos\alpha)} =$$

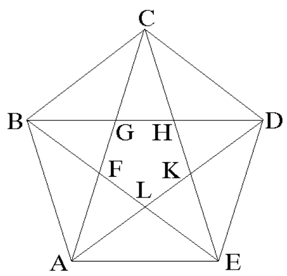
$$\frac{1}{1 + 2\cos\alpha} \Rightarrow 1 + 2\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

1 uždavinyje buvo sin 18° = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Todėl cos 72° = $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \alpha = 72^\circ$.

$\angle A = \angle C = 72^\circ$, $\angle B = 36^\circ$.

Visi trikampiai su tokiais kampais panašūs.

9. Tegul taisyklingojo penkiakampio *ABCDE* įstrižainių susikirtimo taškai yra *F*, *G*, *H*, *K* ir *L* (žr. 2 brėž.). Įrodykite, kad trikampiai *ACE*, *EAK* ir *LAF* yra taurieji. Kiek iš viso tauriųjų trikampių yra 2 brėžinyje?



2 brėž.

Sprendimas. Taisyklingojo penkiakampio vidaus kampų suma lygi

180°(5 – 2) = 540°,

todėl $\angle EAB = \angle ABC = \ldots = \angle DEA = 108^\circ$.

Trikampis *ABC* – lygiašonis, todėl

$$\angle CAB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ \Rightarrow \angle EAC = \angle EAB - \angle CAB = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

Trikampis *EAC* – lygiašonis, todėl jis taurusis (pagal 8 uždavinį).

Analogiškai ir trikampiai: *ABD*, *BCE*, *CDA*, *DEB.*

$\Delta ACE \sim \Delta HGC \Rightarrow \Delta HGC$ – taurusis. Analogiškai dar keturi trikampiai.

Trikampio *ALE* kampai prie pagrindo mažesni už 72° – jis ne taurusis. Analogiškai kiti keturi trikampiai.

ΔEAB : $\angle EAB$ = 108°, o ne 36° – ne taurusis. Analogiškai kiti keturi.

ΔEFC : $\angle EFC$ > 36° – ne taurusis.

ΔAKE : $\angle EAK$ = 108°–72°= 36°, $\angle AEK$ = 72° $\Rightarrow$ $\angle EKA$ = 72°.

ΔAKE – taurusis. Analogiškai ΔAFE – taurusis. Taigi dar 10 tauriųjų trikampių.

Iš viso 20 tauriųjų trikampių.

10. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_2}}, \\ x_2 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_3}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_1}}. \end{cases}$$

Sprendimas. $\dfrac{2}{x_1} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_2}$,

$$\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1};$$

$x_1 = \ldots = x_n = a \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$; $(a, \ldots, a)$ yra sistemos sprendinys.

Tarkime, kad $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$. Tada $\dfrac{1}{x_3} = \dfrac{2}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} + \left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right) < \dfrac{1}{x_2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} > \dfrac{1}{x_3}$. Analogiškai

$$\frac{1}{x_1} > \ldots > \frac{1}{x_n} \tag{1}$$

Bet $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{2}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n-1}} = \dfrac{1}{x_n} + \left(\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n-1}}\right) < \dfrac{1}{x_n}$. Tai prieštarauja (1).

Analogiškai gausime prieštaravimą, jei tarsime, kad $\dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_2}$.

Visi sprendiniai: $(a, \ldots, a)$, $a \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$.