2012m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždavinių sprendimai

Parengė: P. Drungilas, J. Jankauskas

2012 m. vasario 27 d.

1. Žaviajai studentei Monikai parūpo, ar egzistuoja tokia 2×2 matrica B su sveikais koeficientais, kad
$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Sprendimas. Pažymėkime
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Tada
$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Sulyginę matricų koeficientus, randame, kad
$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 1 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$$

Iš trečios lygties: $c(a+d) = 0$, taigi $c = 0$ arba $a = -d$. Lygybė $a = -d$ negalima, nes, įsistatę į antrąją sistemos lygtį, gautume $0 = 1$. Vadinasi, $c = 0$. Tuomet, iš pirmos lygties, $a^2 = 1$, iš ketvirtos $d^2 = 1$. Vadinasi, $a, d \in \{-1, 1\}$. Tokiu atveju, suma $a + d$ turi būti lyginis skaičius (-2, 0, arba 2). Tai neįmanoma, nes antroje lygtyje $b(a + d) = 1$ dešinė pusė yra nelyginis skaičius.

Atsakymas: tokia matrica neegzistuoja.

2. Katinas Micius apibrėžė realiųjų skaičių seką $\varepsilon(n)$, kuri tenkina tapatybę

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\varepsilon(n)}.$$

(skaičius $e = 2.718...$ yra natūralaus logaritmo pagrindas). Katinas Micius prašo įrodyti, kad seka $(\varepsilon(n))$ konverguoja, ir suskaičiuoti jos ribą

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n).$$

Sprendimas. Logaritmavę abi tapatybės puses, gauname

$$1 = (n + \varepsilon(n)) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

taigi

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n$$

Pagal Teiloro formulę su Peano liekamuoju nariu,

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

kai $t \to 0$. Pritaikę formulę su $t = 1/n$, gauname, kad

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - n = \frac{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \to \frac{1}{2}, \quad \text{kai } n \to \infty.$$

Atsakymas: seka konverguoja ir jos riba lygi $1/2$.

3. Kuriems skaičiams $n \in \mathbb{Z}$ egzistuoja toks skaičius $k \in \mathbb{N}$ ir tokia seka $(\varepsilon_j)_{j=1}^k$ su nariais $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, kad

$$n = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \cdot j^2 \ ?$$

Sprendimas: Pirmiausia pastebėkime, kad dviejų gretimų skaičių kvadratų skirtumas

$$(j+1)^2 - j^2 = 2j + 1,$$

o bet kurių gretimų skaičių porų skirtumų skirtumai

$$(j+3)^2 - (j+2)^2 - (j+1)^2 + j^2 = (2j+5) - (2j+1) = 4.$$

Vadinasi, imdami skaičių

$$j^2, \quad (j+1)^2, \quad \ldots, \quad (j+4k-1)^2$$

sumą su ženklais

$$+ \ - \quad - \ + \ \ldots \ + \ - \ - \ +$$

Galime gauti bet kurį natūralųjį 4 kartotinį $n = 4k$. Toliau nesunku suskaičiuoti, kaip gauti 1, 2, 3:

$$1 = 1^2, \qquad 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2, \qquad 3 = -1^2 + 2^2$$

Kadangi galima gauti skaičius 0, 1, 2, 3, o iš likusių skaičių sudėti bet kurį 4 kartotinį, tai galima gauti visus natūralius skaičius $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$. Belieka pastebėti, kad galima gauti ir visus neigiamus sveikus skaičius $-n$, natūralaus skaičiaus n išraiškoje ženklus $+$ ir $-$ pakeitę priešingais.

Atsakymas: uždavinio sąlygą tankina visi sveiki skaičiai $n \in \mathbb{Z}$.

4. Stropioji studentė Simona sako, kad bet kuriam sveikųjų skaičių trejetui a, b, c $\in \mathbb{Z}$, visada egzistuoja toks natūralus skaičius $n \in \mathbb{N}$, kad reiškinys

$$n^3 + an^2 + bn + c$$

nėra jokio sveikojo skaičiaus kvadratas. Įrodykite stropiosios studentės Simonos teiginį.

Sprendimas. Tarkime priešingai - tokio natūralaus skaičiaus n nėra, tai yra, reiškinio $n^3 + an^2 + bn + c$ reikšmė visada yra kokių nors sveikųjų skaičių kvadratai visiems skaičiams $n \in \mathbb{N}$. Pasirinkę $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, turime:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = A^2 \\ 8 + 4a + 2b + c = B^2 \\ 27 + 9a + 3b + c = C^2 \\ 64 + 16a + 4b + c = D^2 \end{cases},$$

kur $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$. Iš trečios lygties atėmę antrąją, gauname

$$26 + 8a + 2b = C^2 - A^2.$$

Kadangi kairę lygties pusė dalijasi iš 2, tai ir dešinė turi dalytis iš 2. Bet tuomet dešinioji pusė dalijasi iš 4 (nes sveikųjų skaičių kvadratų dalybos iš 4 liekanos gali būti tik 0 arba 1). Gauname, kad

$$26 + 2b \equiv 0 \pmod 4 \implies b \equiv 1 \pmod 2$$

Vadinasi b yra nelyginis.

Kita vertus, iš ketvirtosios lygties atėmę antrąją, gauname

$$56 + 12a + 2b = D^2 - B^2.$$

Samprotaudami kaip ir anksčiau matome, kad kvadratų skirtumas dešinėje pusėje dalijasi iš 4, vadinasi,

$$2b \equiv 0 \pmod 4 \implies b \equiv 0 \pmod 2.$$

Gavome, kad b turi būti lyginis - prieštara. Vadinasi, visuomet galime rasti tokį skaičių $n \in \mathbb{N}$, kad $n^3 + an^2 + bn + c$ nebūtų jokio sveikojo skaičiaus kvadratas.

Antras sprendimas (A. Novikas). Pateiksime antrąjį sprendimą, kuriame panaudojamos sveikųjų skaičių kvadratinių liekanų savybės. Mums reikės tokios paprastos lemos:

Lema: Jei skaičius $a \in \mathbb{Z}$ yra kvadratinė liekana moduliu n kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, tai jis yra tikslusis kvadratas.

Lemos įrodymas: Iš tiesų, jei kažkuriam pirminiam p skaičius a dalijasi iš p^{2s-1}, bet ne iš p^{2s} ($s \in \mathbb{N}$), tai a nėra kvadratinė liekana moduliu p^{2s}. Todėl $|a|$ turi būti tikslusis kvadratas. Jeigu a neigiamas, tada $a = -|a|$ nėra kvadratinė liekana moduliu q, kur q yra bet koks pirminis skaičius, besidalijantis iš 4 su liekana 3. Taigi $a \geq 0$, ir $a = |a|$ yra tikslusis kvadratas.

Uždavinio sprendimas: Pažymėkime $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$. Kadangi $f(x)$ yra kubinis daugianaris, tai jis įgyja neigiamų reikšmių. Tegu $f(m) < 0$ su tam tikru $m \in \mathbb{Z}$. Iš lemos aišku, kad egzistuoja toks $d \in \mathbb{N}$, kad $f(m)$ yra kvadratinė neliekana moduliu d. Tačiau tada visi sveikieji skaičiai $f(m + d), f(m + 2d), ...$ yra kvadratinės neliekanos, be to, $f(m + kd) > 0$ visoms pakankamai didelėms natūraliosioms k reikšmėms. Vadinasi, $f(n)$ nėra tikslusis kvadratas su be galo daug natūraliųjų skaičių n.

Trečias sprendimas (A. Dubickas). Pateiksime sprendimą, kuris teisingas bet kuriems nelyginio laipsnio polinomams $f(x)$, tačiau naudoja Hilberto neredukuojamumo teoremą. Pažymėkime

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x].$$

Parodysime, kad dviejų kintamųjų polinomas $g(x, y) = y^2 - f(x)$ yra neredukuojamas žiede $\mathbb{Z}[x, y]$. Iš tikrųjų, jeigu $g(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ tada viename iš daugianarių $u, v \in \mathbb{Z}[x, y]$ (tarkime, u) yra narys y^2, o tuomet $v = 1$, (prieštara), arba abiejuose yra narys θy, kur $\theta = 1$ or -1. Tokiu atveju, nesunku pastebėti, kad $u = \theta y + h(x)$ ir $v = \theta y - h(x)$ su kažkokiu daugianariu $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, taigi $h(x)^2 = f(x)$, kas yra neįmanoma, nes $f(x)$ laipsnis yra nelyginis.

Pagal Hilberto neredukuojamumo teoremą, egzistuoja be galo daug skaičių $n \in \mathbb{N}$, su kuriais polinomas $y^2 - f(n)$ yra neredukuojamas žiede $\mathbb{Z}[y]$. Su šiais skaičiais n, polinomas $y^2 - f(n)$ neturi sveikųjų šaknų, taigi $f(n)$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.