SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ JUBILIEJINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA
Marijampolė, 2016-12-16

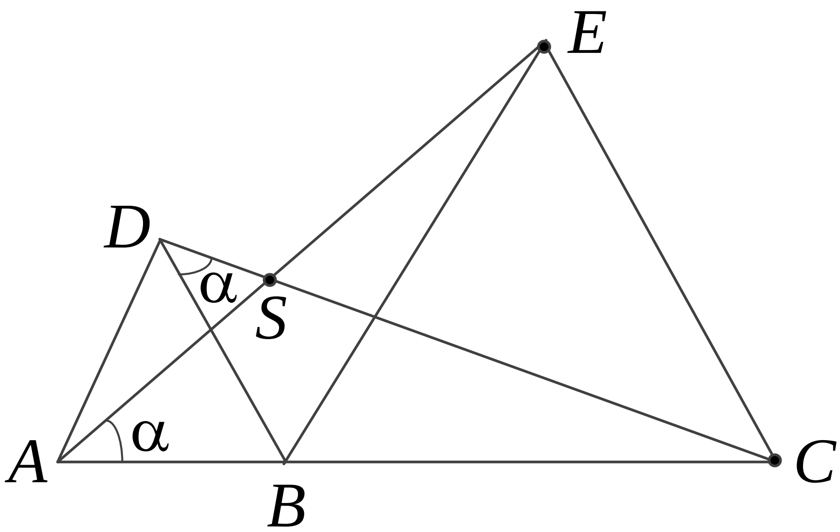
1. Senelis Petras norėjo nuvažiuoti į Alvitą ir nupirkti septynių skirtingų natūraliųjų skaičių rinkinį, kuris įtiktų trims jo anūkams Jonui, Baltrui ir Matui (Matijošiui). Anūkui Jonui reikia, kad skaičių septyniukėje būtų lygiai 5 skaičiai, kurie dalijasi iš 3, Baltrui – kad septyniukėje būtų lygiai 5 skaičiai, kurie dalijasi iš 5, o Matui (Matijošiui) reikia, kad septyniukėje būtų lygiai 5 skaičiai, kurie dalijasi iš 7. Senelis Petras, pats nemenkas ekstremalas, norėjo nupirkti tokį 7 skaičių rinkinį, kuris negana to, kad įtiktų visų 3 anūkų norams, bet dar būtų toks, kurio didžiausias skaičius būtų mažiausias įmanomas. Senelis Petras Alvite galų gale surado tokį rinkinį. Koks yra didžiausias nupirktojo rinkinio skaičius?

Sprendimas.
Tas skaičius yra 105.
Pirmiausiai pastebėkime, kad septyniukėje, įtinkančioje visų trijų anūkų norams, tikrai turi rastis bent vienas skaičius, kuris dalijasi be liekanos ir iš 3, ir iš 5, ir iš 7.
Tarkime, kad jokio skaičiaus, kuris vienu metu dalintųsi ir iš 3, ir iš 5, ir iš 7 nėra. Tada kiekvienas iš tų 7 skaičių atlieka tik daugių daugiausiai du vaidmenis dalyboje iš trijų skaičių, kuriais yra 3, 5 ir 7. Bet tų vaidmenų yra $5 \cdot 3 = 15$, o skaičių, kaip sakyta ir kartota, septyni, vaidmenų yra daugiausiai $2 \cdot 7 = 14$. Todėl vienam kuriam septyniukės skaičiui teks vienu metu dalintis ir iš 3, ir iš 5, ir iš 7. Tačiau kiekvienas toks skaičius tada turi dalintis ir iš jų sandaugos, nes juk jie yra tarpusavyje pirminiai.
Todėl septyniukėje tikrai yra skaičius, kuris dalijasi iš $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, arba kuris yra 105 kartotinis.
Jeigu rastume konkrečią septyniukę, kurios didžiausias skaičius ir būtų 105, tai ir būtų atsakymas. Mums tikrai pavyksta surasti tokią septyniukę:

$$15, 35, 63, 70, 75, 84, 105.$$

Ji tenkina visas sąlygas, kurios buvo keliamos, nes ji patinka ir Jonui, ir Baltrui, ir Matui (Matijošiui).
Atsakymas
Pats mažiausias įmanomas visiems anūkams įtinkančios septyniukės didžiausias skaičius yra 105.

2. (Uždavinys su trikampiais, kurį, kaip nesunkiai „perprantamą“ ir trumpai surašomą, rekomenduoja mūsų mokytoja Daiva☺)
Tiesėje l pažymėti (nurodyta tvarka) trys taškai A, B ir C taip, kad $AB = 2$, o $BC = 3$. Taškai D ir E, esantys vienoje pusėje nuo tiesės l, yra parinkti taip, kad $AD = DB = AB$ ir $BE = EC = BC$. Taškas S yra atkarpų AE ir CD sankirtos taškas. Nustatykite kampo ASD didumą.



Sprendimas
Nagrinėkime trikampius ΔABE ir ΔDBC. Šie trikampiai yra lygūs, nes jų kraštinės AB ir DB yra lygios (abi po 2), lygios yra ir BE su BC (abi po 3), o kampai tarp kraštinių AB ir BE bei DB ir BC abu yra po 120º. Kadangi lygiuose trikampiuose prieš lygius kampus „guli“ lygios kraštinės (ir atvirkščiai), tai kampas EAB yra lygus kampui CDB ir jo didumą pažymime α. Kadangi lygiakraščio trikampio visi kampai yra po 60º, tai kampas DAS kaip kampų BAD ir EAB skirtumas yra lygus 60º – α, o kitas trikampio DAS kampas ADS kaip kampų ADB ir BDS suma yra lygus 60º + α. Todėl dviejų ΔDAS kampų DAS ir ADS suma yra (60º – α) + (60º + α) = 120º, todėl trečiasis trikampio DAS kampas ASD, kurio mes ir ieškome, yra 180º – 120º = 60º.
Atsakymas
Kampo ASD didumas yra 60º.

3. Mano kaimynas Vilkaviškio Martynas grįžo iš Marijampolėje vykusio pasaulio sūduvių suvažiavimo ir ėmė girtis gyvenęs viešbučio „liukse“, kurio numeris buvo triženklis ir gaunamas sudauginus tokius tris skaičius: pirmą vienetu didesnį negu kambario numerio šimtų skaitmuo, antrą vienetu didesnį negu numerio dešimčių skaitmuo, o trečią – tiesiog tokį patį kaip kambario numerio vienetų skaitmuo. Išgirdusi tai, močiutė Teklė iš Alvito pasakė, kad tame pasakojime „nesueina aritmetika“. Ar teisi yra močiutė Teklė?

Sprendimas
Alvito močiutė Teklė yra teisi.
Užrašius sąlygą, t.y. tą triženklį skaičių su skaitmenimis A, B ir C kaip $100A + 10B + C$ ir prilyginus jį $(A+1)(B+1)C$ gauname lygybę

$$100A + 10B + C = (A + 1)(B + 1)C,$$

iš kurios išeina, kad

$$100A + 10B = ABC + AC + BC.$$

Palyginame

$$100A \text{ su } ABC + AC = A(B + 1)C.$$

Kadangi $A \neq 0$, tai gana “patirti”, kad

$$100 > (B + 1)C.$$

O tai akivaizdu, nes B ir C yra skaitmenys, todėl $(B + 1)C$ tikrai neprašoka $10 \cdot 9 = 90$. Kad $10B$ yra tikrai nemažiau už BC, yra aišku iš to, kad B ir C yra skaitmenys. Taigi $100A + 10B \neq ABC + AC + BC$.

Atsakymas

Alvito močiutė Teklė yra teisi.

4. Marijampolės Marijonų gimnazijos moksleivis Marius Marijampolskis turi keturis skirtingus natūraliuosius skaičius. Žinoma, kad trys iš šešių galimų sumų po du skaičius yra 21, 31 ir 41. Kokia yra pati mažiausia galima visų Mariaus Marijampolskio keturių skirtingų natūraliųjų skaičių suma?

Sprendimas

Pirmiausiai pastebėsime, kad šioje trijose mums pasakytose sumose „dalyvauja“ visi minėtieji keturi skaičiai A, B, C ir D.

Tikrai, jeigu jose tedalyvautų tik trys iš tų keturių skaičių, sakykime, A, B ir C, tai tada tos 3 pateiktos sumos turėtų sutapti su rinkiniu

$$A + B,\ A + C \text{ ir } B + C.$$

Bet to negali būti, nes tada visų rinkinio skaičių suma, kuri yra

$$21 + 31 + 41 = 93,$$

vadinasi, nelyginė, turėtų, kitaip žiūrint, būti lygi

$$2A + 2B + 2C.$$

Tai būtų lyginis skaičius – o pas mus to nėra. Taigi sumų rinkinyje dalyvauja visi keturi skaičiai A, B, C ir D.

Kai trijose sumose dalyvauja visi keturi skaičiai, skirsime du atvejus:

a) Yra dvi sumos, kuriose dalyvauja visi keturi Mariaus Marijampolskio rinkinio skaičiai. Tada pačią mažiausią galimą visų keturių skaičių sumą $21 + 31 = 52$ duotų, pavyzdžiui, rinkinys

$$(1;\ 10;\ 20;\ 21),$$

turintis reikiamas sumas

$$(1 + 20;\ 10 + 21;\ 20 + 21),$$

ir 52 tikrai lygią viso rinkinio skaičių sumą $1 + 10 + 20 + 21$.

b) Tokių dviejų sumų, apimančių visus keturis Mariaus Marijampolskio rinkinio skaičius, nėra. Tada, kadangi visose trijose sumose jau turi dalyvauti visi keturi Mariaus Marijampolskio rinkinio skaičiai, tai atsiranda vienas dėmuo, kuris įeina į visas tris sumas, o kiti likę trys dėmenys į tas tris sumas įeina kiekvienas po vieną kartą.

Todėl, nemažinant bendrumo, galima teigti, kad tas bendrasis dėmuo yra A, o likę dėmenys B, C ir D yra sumuojami po vieną kartą, taigi turime sumas $A + B$, $A + C$ ir $A + D$, kurios kažkuria eile yra 21, 31 ir 41. Tada vienas iš dėmenų B, C ir D, sudėtas su A, duoda lygiai 21, o kiti du iš Mariaus Marijampolskio dėmenų B, C ir D yra tokie, kad vienas yra ne mažesnis kaip 11, kitas – kaip 21. Taip yra dėl to, kad A, kuris dalyvauja visose trijose natūraliųjų dėmenų sumose (taigi ir toje sumoje, kuri yra 21), yra natūralusis skaičius, kuris yra ne didesnis kaip 20, o tada likusieji du iš dėmenų B, C ir D, duodančių su A sumą 31 ir 41, turi būti ne mažesni kaip 11 ir 21 atitinkamai.

Todėl visų keturių skaičių suma ir yra ne mažesnė kaip $21 + 11 + 21 = 53$, o tai jau būtų daugiau, negu kad mes esame gavę. Todėl pačia mažiausia galima Mariaus Marijampolskio skaičių suma ir lieka 52.

Atsakymas

Pati mažiausia galima Mariaus Marijampolskio rinkinio skaičių suma yra lygi 52.

5. Iš Marijampolės į Kauną vienu metu dviračiais išvažiavo du mokytojo Beinakaraičio mokiniai – Sesė Geltonkasė ir Bešvilpaujantis Berniokas. Sesė visą laiką važiavo pastoviu 18 kilometrų, o Berniokas – pastoviu 24 kilometrų per valandą greičiu. Po valandos jiems iš paskos taip pat pastoviu greičiu, nors jau motociklu, išvažiavo ir pats mokytojas Beinakaraitis. Amžininkai nustatė ir užrašė, kad Sesė Geltonkasė buvo aplenkta 10-čia minučių anksčiau negu Bešvilpaujantis Berniokas. Kokiu greičiu iš Marijampolės į Kauną važiavo mokytojas Beinakaraitis?

Sprendimas

Per valandą Bešvilpaujantis Berniokas nuvažiavo 24 kilometrus. Po to mokytojas Beinakaraitis ėmėsi trumpinti susidariusį atstumą tarp jų $v - 24$ kilometrų per valandą greičiu, kur v žymi jo paties motociklo greitį. Todėl mokytojas pavys Bešvilpaujantį Bernioką per $24/(v - 24)$ valandos. Panašiai Sesę Geltonkasę žymusis mokytojas pavys per $18/(v - 18)$ valandos. Pagal sąlygą

$$24/(v - 24) = 18/(v - 18) + 1/6$$

(10 minučių yra 1/6 valandos dalis). Toliau gauname lygybę

$$24(v - 18) = 18(v - 24) + (1/6)(v - 24)(v - 18),$$

iš kurios išeina, kad

$$(1/6)v^2 - 13v + 72 = 0.$$

Šios lygties šaknys yra $v = 6$ (netinka pagal uždavinio sąlygą, nes tada mokytojas jų nepasivytų) ir $v = 72$, kuri tinka mūsų sąlygai.

Atsakymas

Mokytojas Beinakaraitis važiuoja 72 kilometrų per valandą greičiu.