SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA
Marijampolė, 2014-12-12

1. Ankstyvoji Dovyduko Marijampoliškio kūdikystė baigėsi tada, kai iš jo tėvų namų į Vilnių vadovauti Debesų kompiuterijos trestui išsikraustė dėdė Stasys. Ir ne vien tik dėl to, kad po to labai nuseko Dovyduko saldainių jūra tortų krantais apdėta. Kaip linkusiam prie rašto labiausiai berniukui įstrigo supakuotos išvežti dėdės Stasio dėžės su knygomis. Tų dėžių buvo didžiulė virtinė, o visos jos kartu svėrė net 10 tonų. Dovydukas gerai nugirdo, kad jokios dėžės svoris neviršija 1 tonos. Kiek mažiausiai sunkvežimių, galinčių vežti ne daugiau kaip 3 tonas krovinio kiekvienas, reikėtų užsakyti, kad daugiau iki krovimo tų dėžių atskirai jau nebesvėrinėjant tokiais sunkvežimiais į Vilnių būtų garantuotai galima išvežti visas dėdės Stasio dėžes su knygomis?

2. Į kiekvieną Dovyduko Marijampoliškio gimtojo Naujojo Virbalio miestelio namą vieną gražų gruodžio pirmadienio rytą laiškininkas atnešė arba 1, arba 2, arba 3, arba 4 šv. Kalėdų sveikinimus. Dovydukas su savo draugais atliko statistinius tyrimus ir tiksliai suskaičiavo, kad namų, į kuriuos laiškininkas atnešė net 4 sveikinimus, buvo lygiai septynis kartus daugiau, negu namų, į kuriuos tebuvo atneštas vienintelis sveikinimas, o namų su 2 šv. Kalėdų sveikinimais buvo lygiai 5 kartus daugiau negu namų su vienu sveikinimu. Raskite, kiek vidutiniškai šv. Kalėdų sveikinimų tą lemtingą gruodžio pirmadienį buvo atnešta į kiekvieną gimtojo Dovyduko miestelio Naujojo Virbalio namą.

3. Dovydukas, kartą vartydamas savo senelio Motiejaus Marijampoliškio gimnazijos parengiamojo skyriaus geometrijos uždavinius, rado vieną sąlygą, prie kurios jo garbusis senelis buvo padėjęs šauktuką ir dar prirašęs trumpą komentarą „Žavu“. Dovydukas užsidegė noru išspręsti tą uždavinį, kuriame matėsi į kvadratą įbrėžtas apskritimas ir dar stačiakampis, kuris buvo kvadrato viduje, bet apskritimo išorėje. Dvi to stačiakampio kraštinės „ėjo“ kvadrato kraštinėmis, o viena stačiakampio viršūnė priklausė įbrėžtam apskritimui (kaip parodyta brėžinyje). Buvo dar pasakyta, kad to stačiakampio aukštis yra dvigubai didesnis už jo plotį. Koks yra kvadrato ir stačiakampio plotų santykis?

4. Šakiuose ėmė kartą ir susidraugavo du natūralieji skaičiai m ir n. Kartą, bekeliaudami į Vilkaviškį, jie pravažiavo pievą, kurioje vaikštinėjo trys lygtys, viena vardu $9x + 4y = 135$, kitos vardas buvo $4x + 9y = 135$, o trečia buvo vardu $11x + 6y = 240$. Bet juodu net galvos į tą pusę nepasuko. Bešvilpaujančio Suvalkijos bernioko sesė geltonkasė mums ir sako: „Be reikalo jiedu net galvos į tas įspūdingas lygybes nepasuko. Juk jeigu jose vietoje x imtume ir įrašytume tą keliu pravažiavusį m, o vietoje y imtume jo „mirtiną“ draugą n, tai paaiškėtų ne tik tai, kad kažkurios dvi iš tų lygčių virsta teisingomis lygybėmis, bet ir kad ta likusi lygtis teisinga lygybe niekaip nevirsta“. O sumanusis Dovydukas Marijampoliškis dar pridūrė, kad paaiškėtų ne tik tai, kad kažkurios dvi lygybės yra tenkinamos, o likusioji netenkinama, bet paaiškėtų ir pati didžiausioji paslaptis: kokio tiksliai didumo yra tie du „draugeliai“ m ir n, kurie ką tik „pradardėjo“ pro šalį, leisdami sau į nieką nekreipti dėmesio.
Taigi kokie yra tokie du natūralieji skaičiai m ir n, kurie tenkina kažkurias dvi iš lygybių $9m + 4n = 135$, $4m + 9n = 135$, $11m + 6n = 240$, o likusiosios – niekaip ne?

5. Kartą Dovydukas Marijampoliškis, būdamas gerokai išsiblaškęs, gana ilgai vargo su tokiu uždaviniu, kuriame buvo pasakyta, kad skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą

$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1,$$

ir buvo klausiama, ar būtų galima tik tiek težinant surasti, kam būtų lygi suma

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}.$$