

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
Leidykla TEV,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XVIII LIETUVOS 5-6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ
MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2016 09 24

1. Santūrusis kinas Čengas ir dabar nelabai supranta, kodėl jo pirmgimis sūnus Mingas jau nuo lopšio šypsodavosi, išgirdęs sakant žodį 13 ir taip domėdavosi viskuo, kas su tuo skaičiumi yra susiję. Berniuko silpnybę skaičiui 13 tėvas sugalvojo panaudoti žaizdindamas savo sūnaus skaitinę fantaziją prikurdamas visokių nesunkių, gana patrauklių ir visai nenuvalkiotų aritmetinių uždavinių. Štai vienas toks uždavinėlis iš ciklo „Galvok, kaip tinkamas, bet 13, matai gi pats, yra visur sutinkamas“☺

Skaičius N , sudarytas iš dviejų ar iš daugiau skaitmenų, vadinamas *trylikiniu*, jei bet kurie du iš eilės einantys jo skaitmenys sudaro iš 13 besidalijantį skaičių (tėvas nuolat primena sūnui, kad joks skaičius neprasideda 0). Konkrečiu trylikinio skaičiaus pavyzdžiu tėvas nurodė Mingui skaičių 139. Skaičius 139 tikrai trylikinis, nes

$$13 \times 1 = 13 \text{ ir } 39 = 13 \times 3.$$

- (A) Nurodykite kokį nors 4-ženklį trylikinio skaičiaus pavyzdį.
- (B) Suraskite du 5-ženklus trylikinius skaičius.
- (C) Sudarykite pilną 5-ženklių trylikinių skaičių sąrašą.

2. Turbūt visi esame daug girdėję apie Hong-Konge vykstančius visokius aritmetinius vaidinimus. Aritmetinis performansas, apie kurį dabar pasakosime, dėjosi vienoje iš centrinių to didžiulio gniaužiančio kvapą megapolio aikščių, todėl ir mačiusių – nebūtų didmiestis – buvo dešimtys tūkstančių. O prasidėję viskas labai paprastai – vienas tėvas pademonstravo savo sūnui 2×4 lentelę, kurios ir pirmoje, ir antroje eilutėje visi įrašomi skaičiai buvo ir sveiki, ir teigiami, ir kiekvienoje atskiroje eilutėje dar ir visi skirtingi, o abiejų kiekvieno stulpelio skaičių sumos visada buvo 10 (tai ir matote lentelėje apačioje).

7	9	4	6
3	1	6	4

- (a) Užpildykite kitą, jau 2×6 lentelę, kurioje yra 2 eilutės ir net 6 stulpeliai bei kurios ir pirmoje, ir antroje eilutėje yra įrašomi sveikieji teigiami skaičiai. Be to, kiekvienoje eilutėje visi įrašomieji skaičiai turi būti skirtingi, o abiejų bet kurio stulpelio skaičių suma turi būti lygi 10.
- (b) Nustatykite, kiek daugiausiai stulpelių gali būti tokioje dviejų eilučių lentelėje?

3. Vienas taupus kinas, vardu Mingas, turėjo sukaupęs 200 tūkstančių juanių savo dviejų dukrų vestuviniams žiedams. Kinijoje tais laikais buvo šventai laikomasi tokio papročio, pagal kurį vestuvinis žiedas turėdavo būti dviem brangakmeniais papuoštas auksinis apvadas, kurio kaina būdavo apskaičiuojama kaip auksinio apvado ir abiejų jo brangakmenių kainų sandauga. Ar užteks kinui pinigų savo pirkiniui, jeigu pas juvelyrą jau bebuvu likę tik du auksiniai apvada, kainuojantys 10 ir 30 juanių, ir keturi brangakmeniai, kainuojantys atitinkamai 60, 70, 80 ir 90 juanių. Ar tikrai pakaks rūpestingajam kinui pinigų šventajam savo pirkiniui?

4. Šachmatų turnyre dalyvavo 6 stipriausieji kinų šachmatininkai A, B, C, D, E ir F , kiekvienas žaidėjas sužaidė po vieną partiją su visais likusiais žaidėjais. Po turnyro paaiškėjo, kad žaidėjas A visas partijas

sužaidė lygiosiomis, žaidėjas B – nepralaimėjo nė vienos partijos, C laimėjo prieš turnyro nugalėtoją, o D – aplenkė E , bet surinko mažiau taškų už F . Žinodami, kad šachmatuose už pergalę skiriamas 1 taškas, už lygiąsias $\frac{1}{2}$ taško, o už pralaimėjimą – 0 taškų, nustatykite, kiek taškų sukaupė turnyro nugalėtojas?

5. Pagal kinų imperatoriaus dvaro aritmetinių padavimų knygos padavimą apie kažkada Šanchajaus apylinkėse gyvenusį berniuką, kuris žemiau esantį uždavinį išsprendė mintinai – jokio popieriaus į rankas nepaimdamas.

Skaičius yra vadinamas *palindromu*, jeigu jis lieka toks pat, ar mes skaitytume jį iš kairės dešinės arba, atvirkščiai, iš dešinės – kairės. Bendru visuotiniu sutarimu jau ir tada joks skaičius neprasisidėdavo skaitmeniu 0.

O pats uždavinys buvo toksai: prie 6-ženklis palindromo yra pridedamas 5-ženklis palindromas 21312 ir sudėjus išeina jau 7-ženklis palindromas. Koks išeina tasai 7-ženklis palindromas?

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
3D Art
Kęstutis Naujokaitis
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XVIII LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2016 09 24

1. (Neišmokę gliaudyti tokių ir panašių uždavinių Jūs kažin ar galėsite pasiekti gerų rezultatų bet kokiam nors kiek rimtesniame Hong Kongo licėjuje)

Yra 12 lempų, kurios pradžioje yra visos išjungtos, kiekviena su savo jungikliu. Paspaudus jungiklį, išjungtoji lempa įsijungia, o įjungtoji lempa – išsijungia. Kiekvienu kartu galima paspausti bet kurių 5 lempų jungiklius. Kiek mažiausiai kartų reikės spausti taip, kaip čia nurodyta, kad būtų įjungtos visos lempos?

2. **(Tėvo Mingo dvasia gyva)** Žemiau pavaizduotą kvadratą keturi tėvo Mingo provaikiai karštai troško supjaustyti į keturias visiškai vienodas dalis taip, kad iš į kiekvieną dalį patekusių skaitmenų bet kuris iš jų galėtų su neslepiamu pasididžiavimu išdėlioti „metų skaičių“ 2016. Negi jiems gali pasisekti tai padaryti?

	2				
	2	6	2		
	1	0	1	0	
	0	1	0	1	
		6		6	
2				6	

3. Skaičius 4 į skaičių 97 „sutelpa“ net 24 kartus ir sutilpus dar 1 „atlieka“, nes

$$97 = 4 \cdot 24 + 1.$$

Tada „aritmetiškai pasikaustę“ mokyti kinų tėvai savo dukroms ir sūnums prireikus labai kantriai kartoja, kad skaičiaus 97 dalybos iš 4 (nepilnasis) dalmuo yra 24, o liekana 1.

Vienas kino Mingo sūnus Čengas, kuris niekada nedarydavo jokių aritmetinių klaidų, nors tėvas ir sakydavo, kad jis lėtas, kartą atliko tokio skaičiaus N dalybą iš 333 ir nustatė, kad tos dalybos (nepilnojo) dalmens ir liekanos suma yra lygiai 300. Kitas sūnus, vardu Lin Binis, tėvo numylėtinis, atliko to paties skaičiaus N dalybą iš 777 ir gavo, kad ir dabar (nepilnojo) dalmens ir liekanos suma vėl yra 300. Ar galėtumėte tik tiek težinodami paaiškinti mums, koks galėtų būti tas skaičius N ?

4. 6 patys „kiečiausi“ kinų šachmatininkai sužaidė vienas su kitu po vieną partiją. Paaiškėjo, kad žaidėjas *A* visas partijas baigė lygiosiomis, žaidėjas *B* nepralošė nė vienos partijos, žaidėjas *C* nugalėjo turnyro laimėtoją, žaidėjas *D* aplenkė žaidėją *E*, bet vis tiek atsiliko nuo žaidėjo *F*. Kuris iš jų laimėjo turnyrą ir kiek taškų jis surinko, jeigu jau ir tais, dar ikidinastiniais laikais, už laimėtą partiją jau būdavo skiriamas 1 taškas, o už lygiąsias – $\frac{1}{2}$ taško, o už pralaimėtą partiją, žinoma, ką čia beslėpsi, visiškai nieko neduodama.

5. Ne taip toli nuo Didžiosios Kinų sienos gyveno vienas toks atsiskyrėlis, kuris sakė, kad tikrąją skaitinę pilnametystę jis galėtų pripažinti tik tokiam jaunuoliui, kuris, išėjęs į dykumą, sugebėtų vienas pats, visai niekieno nepadedamas, atsakyti į tokį klausimą: ar galima į lentelės 5×10 langelius surašyti visus skaičius nuo 1 iki 50, po vieną skaičių kiekviename langelyje, taip, kad visų eilučių ir visų stulpelių skaičių sumos pasirodytų esančios lygios 15-ai iš eilės einančių natūraliųjų skaičių?

6. Vienas kinas, Europoje žinomas kaip Gen Geo, nuo mažens nieko taip nemėgo, kaip geometrinius uždavinius, nes tiesiogiai iš savo senelio, vieno iš Didžiosios kinų sienos architektų, buvo sėkmingai paveldėjęs visus jo talentus, o dar ir savųjų turėjo. Amžininku liudijimu, jis būdamas nepilnų 10 metų per nepilnas 10 minučių puikiausiai susigaudė, koks yra tikrasis šio žemiau pateikiamo uždavinio atsakymas.

Duotas taisyklingasis šešiakampis $ABCDEF$, kurio plotas yra lygiai 1. Nagrinėkime visus galimus trikampius, kurių viršūnės yra kurios nors trys to taisyklingojo šešiakampio viršūnės. Kam lygi visų tų trikampių plotų suma?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7