

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XVI LIETUVOS 5-6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2014 09 27

1. Kiškutis Mikas Paikutis padirbėjęs su skaičiais ir skaitmenimis yra giliai įsidėjęs į širdį, kad koduotai perrašytose skaitinėse lygybėse skirtingi simboliai (kaip čia dabar kad $\square, \circ, \diamond, \ominus$) atitinka skirtingus skaitmenis, o vienodi – vienodus. Jis gerą valandą smalsiai žiūrinėjo dvi lygybes

$$\circ \cdot \circ = \diamond \circ \quad \text{ir} \quad \ominus + \ominus = \square \circ$$

kol jam nebeliko nė vienos abejonės, kad simbolis \ominus žymi skaitmenį:

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) teisingas atsakymas yra kitoks

2. 9 elektros lemputės yra išdėstytos „kvadratinio būdu“:

$\ominus \ominus \ominus$
 $\ominus \ominus \ominus$
 $\ominus \ominus \ominus$

Visas aritmetizuotas mokytas Miškas žino, kad kiekviena lemputė turi dvi priešingas būsenas: būseną „į“ ir būseną „iš“. Kiškutis Mikas Paikutis ar kitas įgaliotas žvėriukas gali letena spustelėti bet kurią lemputę.

Spustelėjus lemputę jos būseną „pereina į priešingą“: jeigu iki spustelėjimo lemputė buvo būsenoje „į“, tai po spustelėjimo ji bus būsenoje „iš“, ir atvirkščiai; be to, į priešingą būseną po spustelėjimo pereina visos ir tos eilutės, ir to stulpelio lemputės.

Iš pradžių visos 9 lemputės buvo būsenoje „į“.

Koks yra pats mažiausias lempučių spustelėjimų skaičius, kuriuos turi padaryti kiškutis Mikas Paikutis, kad visos lemputės atsidurtų būsenoje „iš“?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 9 (E) to padaryti neįmanoma

3. Elitinis penkių Labanoro girių vilkų komandų futbolo turnyras nutrūko dar nepasibaigęs. Tame neregėtos įtampos bei reto grožio braziliškos pakraipos turnyre, kaip tai dabar jau yra nusistovėję net kiškių futbolo varžytuvėse, už kiekvienas laimėtas rungtynes yra skiriami 3 taškai, lygiosiomis sužaistos rungtynės atneša abiem komandoms po tašką, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų negauna. Nors niekas taip ir nesiėmė galutinai paaiškinti, kodėl tas turnyras nutrūko, tylėjo net garsus visų to Mokslų Miško visų galų meistras Barsukas Kalbutis Tiekteleika, bet buvo gerai žinoma, kad turnyrui nutrūkstant jokios dvi komandos neturėjo po tiek pat taškų, o bent po vieną tašką jau turėjo visos komandos.

Susirinkusi eksperčių Pelėdų bei žinovų Apuokų taryba ilgai ir intensyviai svarstė, po kokio paties mažiausio sužaistų rungtynių skaičiaus galėjo būti nutrauktas toks turnyras (o visi kiti ką nors suprantantys zuikiai puikiai, kregždės ir kiti žvirbliukai, nors ir labai atidžiai klausėsi, bet vargu ar daug ką iš to, kas buvo pasakyta, suprato; na gal bent tiek, kad pasiklausę iš karto galėtų ką nors rišliai pakartoti).

Tačiau pagrindinę problemą suvokė ir galėjo pakartoti visi:

Nurodykite patį mažiausią galimą sužaistų rungtynių skaičių, po kurio galėjo nutrūkti toks turnyras, jeigu visos jame dalyvaujančios komandos jau buvo spėjusios pelnyti taškų ir visos buvo pelniusios tų taškų po skirtingą skaičių.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) teisingas atsakymas yra kitoks

4. Žemiau esanti lentelė Meškino Sliūkino Telesforo nuomone, manymu bei įsitikinimu yra kupina mistikos. Jūs tik pažiūrėkite:

5	10	9
12	8	4
7	6	11

Yra visai aišku, kad sudėjus bet kuriuos 3 skaičius bet kurioje jos eilutėje, ar bet kuriame stulpelyje ir net abiejose įstrižainėse visada gauname vienodą sumą. Nenuostabu, kad tai verčia iš kojų visą skaičių Miško „fauną ir florą“, nes juk ir žmonės, kurių jau tikrai niekuo nebenustebinsi, tokius kvadratus pagarbiai vadina *magiškais kvadratais*.

Žemiau esantis kvadratas, kaip sakoma, taip pat yra *magiškas*, nors mums tėra parodyti vos du „konkretūs“ to *magiško kvadrato* skaičiai.

Ar žinant tik tiek, kiek čia yra pasakyta, jau galima būtų nustatyti, koks skaičius turėtų rasti šito *magiško kvadrato* klaustuku pažymėtame langelyje?

	2	
?		
		9

(A)10 (B)11 (C)5 (D)16 (E) teisingas yra kitoks atsakymas

5. Žvalus 6-ių metų berniukas Martynas Šešelgis turi didžiulę svajonę: jis tikisi vieną gražią dieną imti ir pajėgti ratuku bet kuria eile surašyti visus skaičius nuo 1 iki 8 taip, kad bet kuris skaičius dalytųsi be liekanos iš abiejų to skaičiaus kaimynų skirtumo. Nugirdusi apie tai Lapė Snapė Aristida švelniai šaipėsi, kad berniukų norai būna labai gražūs, bet ne visada suderinami su aritmetine tobulyste.

Suspainiojęs Martynas visai nebesusigauja, kaip yra iš tikrųjų yra: įmanoma ratuku bet kuria eile surašyti visus skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 taip, kad bet kuris skaičius dalytųsi iš abiejų to skaičiaus kaimynų skirtumo, ar neįmanoma.

Padėkite Martynui suprasti, kaip čia yra iš tikrųjų yra ir, jeigu tai įmanoma, tai nurodykite tokį pavyzdį, o jeigu to padaryti negalima, tai suvokiamai ir nesudėtingai paaiškinkite mums, kodėl to padaryti negalima.

6. Įmdamas 4 skaičius

1, 2, 3 ir 5

ir sudėdamas juos visais galimais būdais po du skaičius Apuokas Voldemaras Burklys gavo tokius skaičius

1 + 2, 1 + 3, 2 + 3, 1 + 5. 2 + 5 ir 3 + 5,

sudarančius rinkinį

3, 4, 5, 6, 7 ir 8.

Atsliūkinusi Lapė Snapė Aristida su vylinga paslaptina šypsena saldžiu balseliu rypuodama painioja Apuokui Voldemarui Burkliui galvą vis sakydama, kad ji šiąnakt sapnavusi visai kitą keturių skaičių rinkinį, su kuriuo atlikus tą patį, kas buvo atlikta su rinkiniu 1, 2, 3 ir 5, vėl atsiranda toks pats visų galimų skirtingų skaičių porų sumų rinkinys

3, 4, 5, 6, 7 ir 8.

Ar tiesą sako Lapė Snapė Aristida, ar tikrai ji sapne taip tiksliai viską matė „sužiūrėjo“, jeigu tokiam skaičių dėliojimui ji, žinoma, prirėkus gali imti nebūtinai tik sveikuosius (ir net nebūtinai vien tik teigiamus) skaičius?

Kartojame klausimą:

Tai galima ar ne surasti kitus keturis tokius skaičius, kuriuos dėliodami visais galimais būdais po du, vėl gautume tą patį sumų rinkinį 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 (tą patį, kurį gavome pradžioje visais būdais po du dėliodami skaičius 1, 2, 3 ir 5)?

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XVI LIETUVOS 7–8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2014 09 27

1. Miško viduryje stovi didžiulė lenta, prie kurios bruzda 85 Kiškiai Piškiai, kurie ką moka, ką ne, bet visi jie skaičius rašo „šviesos greičiu“. Kaip sakyta, jie bruzda pačiame Mokyto Miško viduryje prie neišvaizduojamo didumo lentos, kurioje iš eilės yra surašyti visi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 2150.

Kiekvieną minutę vis kitas Kiškis, pradėdamas 1-uoju ir baigiant 85-uoju, suspėja atlikti su tais skaičiais tokią operaciją:

jeigu skaičius dalijasi iš 100, tai jis tą skaičių iš 100 ir padalija, o jeigu skaičius iš 100 nesidalija, tai iš tokio skaičiaus jis atima 1, tada kiekvieną senąjį skaičių nuvalo ir vietoje jo parašo gautą rezultatą (kaip pamename, visus 2150 skaičių jis spėja pakeisti per minutę – ir taip kiekvienas).

Koks skaičius bus pats didžiausias iš visų lentoje parašytųjų, kai savo rašymus bus baigęs paskutinis, 85-tasis Kiškis Piškis, vardu Mykoliukas?

2. Lapė Snapė Saldžiūnė vėl porino Zuikučiui Paikučiui kažkokias veikiausiai jos pačios išgalvotas fantazijas apie tai, kad gyvena kažkur Aritmetikos brūzgynuose toks daugiaženklis skaičius, kuriame garantuotai yra bent du dvejetai, dar garantuotai yra dar ir bent du ketvertai – ir net dar ir bent du aštuonetai yra – ir kuris vis tiek niekaip nesidalija be liekanos į 4 lygias dalis, nors tu verk.

„Surastum tu man, Paikuti, kada kokį nors vieną tokį skaičių“ - prisispyrusi prašydavo ji zuikio.

O savo vaikams Lapė Snapė sekdamas jau nebe tą, bet kitą, nors ir panašią, bet jau kitokią pasaką, kuri baigdavosi atviru lapiukų prašymu surasti ne kokį nors vieną galimą tokį pavyzdį, bet jau iš karto daug nedelsiant – patį mažiausią iš visų tokių galimų daugiaženklių skaičių.

Taigi ir mes dar sykį paklauskime to paties pakartodami klausimą: koks yra pats mažiausias daugiaženklis skaičius, kuriame yra bent du dvejetai, bent du ketvertai ir bent du aštuonetai ir kuris nesidalija be liekanos iš 4?

3. Netoli Gelgaudiškio esančioje Valenčiūnų Barsukų akademijoje kartą metuose būdavo organizuojama teisėta natūralių pokyčių diena. Tą dieną prieš didžiąją pertrauką mokytojas Kurmis neva natūraliai palikdavo klasėje dieną ir mokiniai – barsytės ir barseliai – imdavo įrašinėti pažymius.

Tais atmintiniais metais kiekviena barsytė įrašė po 15 dešimtukų (daugiausia savo draugams ir draugams, bet nepamiršo ir savęs), o kiekvienas barselis (taip pat nebūtinai tik sau) po 11 dvejetų.

Susumavus visus tuos pokyčius paaiškėjo, kad po šios teisėtos papildančiosios pažymių korekcijos pas kiekvieną barsytę atsirado po 7, o pas kiekvieną barselį – net po 21 naują pažymį.

Ko toje barsukų klasėje daugiau – barselių ar barsyčių?

4. Vilkų aukščiausioje lygoje į kamuolį spardo 5 puikios komandos, kurios dabar ką tik baigė vasaros pirmenybes. Jos vyko vadinamąja vieno rato sistema, kai kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su visomis likusiomis komandomis. Yra nusistovėjusi tvarka, kad už laimėtas rungtynes komandai skiriami 3 taškai, už sužaistas lygiosiomis – 1 taškas, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų negauna.

Pasibaigus turnyru tapo žinoma, kad 4 iš 5 dalyvavusių komandų atitinkamai sukaupė 1, 2, 5 ir 7 taškus.

Atėjusi Lapė Snapė Vilija ėmė suokti, kad iš tų keturių komandų surinktų taškų dar nieko konkretaus nebūtų galima pasakyti apie, kiek taškų surinko penktoji komanda.

Atsiradęs Ežiukas Rūke su arkliu Dominyku iš karto įsijungė į svarstymus, bet kadangi dabar dar „labai vasara“, tai Arkliui Dominykui „nesigalvoja“, o Ežiukas rūke, kaip visada, labai stengiasi, nors, atvirai kalbant, jam tikrai ne iš karto ima sektis.

Tai gal jūs galite pasakyti, kiekgi taškų surinko penktoji komanda, o jeigu to neįmanoma padaryti – paaiškinti kodėl?

5. Drambliukas Demantas Staraubliūnas labai mėgsta geometriją su visomis jos dëlionėmis ir ypač noriai lieja kvadratinės plyteles. Jis turi „prisiliejęs“ daugybę įvairiausių kvadratinių plytelių, arba vadinamųjų kvadratinių ruošinukų, kurių kraštinių ilgiai yra iš eilės einantys skaičiai 1, 2, 3, 4 ir t.t. Visi žino, kad kiekvienos rūšies ruošinukų jis turi pakankamai – mokytame miške visi žino, kad jam niekada nieko dar nepasitaikė, kad pristigtų.

Vieną dieną drambliukas Demantas Staraubliūnas taip ir pasakė susirinkusiems į svečius žvėreliams, savo ištikimiausiems pagalbininkams bei patarėjams, tikriems aritmetinių vargų broliams: „Aš jau pavargau lieti, bet užtat nors Jūs būkite nepavargę ir visada pasiryžę pozityviai ir aktyviai kolektyviai galvoti. Štai aš dabar skelbiu konkursą pačiam mažiausiam įmanomam kvadratui, kuriam išdėti prireiktų lygiai 11 mano ruošinukų. Nustatykite, kokia yra pati mažiausia įmanoma tokio iš 11 ruošinukų (nebūtinai skirtingų) sudedamo kvadrato kraštinė“.

Po to jis dar jiems metodiškai priminė bei įdėmiai pakartojo, kad kvadratas tais 11 ruošinių turi būti išgrįstas išklotas ištisai visas, be jokių „persidengimų kvadrato viduje“ ir be jokių „prasikišimų į jo išorę“.

Kam lygi paties mažiausiojo kvadrato kraštinė, kuris yra visas – be tarpų, persidengimų bei išsikišimų išklojamas panaudojus 11 nebūtinai skirtingų drambliuko Demanto Staraubliūno ruošinukų?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) teisingas atsakymas yra kitoks

6. Lapė Vilytė Saldžiūnė savo lapiukams sekmadieniais prieš miegą visada iškilmingai sekdamo tokią pasaką, kurioje prieš besimerkiančias jų akis visada didingai iškildavo tokia viena nuostabi burtų kupina karalystė. Kiekvienas tos karalystės gyventojas yra vis kitas natūralusis skaičius; be to, tie skaičiai nuo amžių pasižymi tokia, neslėpsime, be galo įspūdinga ir net pudelį „iš koju verčiančia“ savybe: sudėjus bet kuriuos keturis tos karalystės skaičius visada išeina daugiau negu 37, o sudėjus bet kuriuos tris – visada mažiau kaip 37.

Pasaką Mama Lapė visada baigdamo migdančiais žodžiais: „Ir jokie pasaulio išminčiai ir dabar dar nepajėgia pasakyti, kiek daugiausiai skaičių gali būti toje karalystėje“.

Tai gal Jūs galėtumėte pasiklausę pasakyti, kiek daugiausiai skaičių gali gyventi toje karalystėje?