

**Organizuoja**  
**Vilniaus universitetas**

**Remia**  
**UAB „AFFECTO LIETUVA“**  
**LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,**  
**Leidykla TYTO ALBA,**  
**NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,**  
**LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA**

**XV LIETUVOS 5–6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ**  
**MATEMATIKOS OLIMPIADA**  
**Konkurso dalyvius sveikina**  
**Roza LEIKIN,**  
**Tarptautinės gabiųjų ugdymo ir kūrybingojo mokymo**  
**Asociacijos prezidentė**  
Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2013 09 28

**1.** Kurmio Karolio teta Kas(t)ė Rausytė nuo jaunų dienų tiki į dviženklį skaičių harmoniją. Ji labai vertina visus tokius dviženklus skaičius ir laiko, kad jie yra *teisingai išminčių sugalvoti*, jeigu tą dviženklį skaičių galima gauti prie kažkokio (mažesnio) dviženklio skaičius pridėjus abudu to kažkokio (mažesnio) skaičius skaitmenis. Pavyzdžiui, skaičius 25 yra *teisingai išminčių sugalvotas*, nes yra toks dviženklis (mažesnis) skaičius 17, prie kurio pridėjus abudu to skaičiaus 17 skaitmenis 1 ir 7, tikrai ir gaunami tie 25:  $17 + 1 + 7 = 25$ . Visus likusius dviženklus skaičius teta Kas(t)ė vadina *skersais dviženkliais* skaičiais.

Jau kuris laikas teta Kas(t)ė visus aplinkinius gudruolius siaubia klausimu, koks gi yra pats didžiausias *skersas dviženklis* skaičius?

Teta Kas(t)ė ne tik klausia, bet ir prašo paaiškinti, kodėl taip yra?

**2.** Kurmis Murmis ir Ežys Kežys labai susidraugavo, kai jie pusantros savaitės grūmėsi su tokiu uždaviniu, apie kurį Barsukė Narsukė patempusi ūsą dūsavo, kad čia ne užsikasusių kurmių ir pievoje plevenančių drugelių reikalai. Nors pats tas uždavinys, arba, kaip ji sakė, uždaviniūkštis buvo tik lentelės  $5 \times 5$  „pripurškimas“ skaičiais – griežtai ir aiškiai įrašant po vieną skaičių į kiekvieną langelį. Buvo griežtai reikalaujama, kad ir pirmoje, ir antroje eilutėje būtų po kartą įrašyti visi skaičiai 1, 2, 3, 4 ir 5, kad ir trečioje, ir ketvirtoje eilutėje būtų po kartą įrašyti visi skaičiai 3, 4, 5, 6 ir 7, o pačioje paskutinėje penktoje eilutėje turėjo po kartą būti įrašyti visi skaičiai 4, 5, 6, 7 ir 8.

Taip užpildžius lentelę - eilutės po eilutės – būdavo suskaičiuojama visų 5 stulpelių skaičių sumos ir jeigu pasirodydavo, kad jos visos yra lygios, tai toks lentelės užpildymas būdavo vadinamas *finansiška stabilium*.

Rašė braukė skaičius pamažu kurmis su ežiu, palindę į šešėlį po kaimyno garažu, ir pirmą dieną nelabai ką teišpaudė, atvirai sakant, grįžo jie namo taip tos lentelės finansiška stabiliai ir neužpildę. Tai jie yra žvėriukai, iš jų nėra kaip to *finansiška stabiliaus* lentelės užpildymo ir reikalauti – o kaip Jums, ar Jums pavyktų *finansiška stabiliai* užpildyti tą  $5 \times 5$  lentelę sveikaisiais skaičiais taip, kad ir pirmoje, ir antroje eilutėje būtų surašyti visi sveikieji skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, ir trečioje, ir ketvirtoje eilutėje būtų surašyti visi sveikieji skaičiai 3, 4, 5, 6, 7, o penktoje eilutėje būtų surašyti visi skaičiai 4, 5, 6, 7, 8 ir visų stulpelių skaičių sumos būtų visos vienodos.

Jeigu Jums pavyks *finansiška stabiliai* užpildyti lentelę, tai parodykite ir mums, kaip tai daroma?

**3.** Barsukas Graužtukas rado ant pliauskos išpjaustytą triženklį skaičių ir kadangi jam, kaip visada, niežtėjo dantys, tai jis net pats nepastebėjo kaip ėmė ir nugraužė vidurinę to skaičiaus skaitmenį. Prisiartinęs kurmis Karolis berado dviženklį skaičių, kuris jau buvo 12 kartų mažesnis už pradinį barsuko Graužtuko dar nepagraužtą skaičių. Jie ėmė svarstyti, ar dar yra tokių skaičių

ir net išsismaginę ėmėsi samprotauti, kiek tokių skaičių apskritai esama. Padėkite jiems, nes barsukai pagal jų Švietimo programas dirbti su dviženkliais bei triženkliais skaičiais gali tik išimties tvarka ir tai tik su abiejų tėvų leidimu.

(A) Suraskite jiems vieną tokį skaičių ir paaiškinkite, kodėl jis tinka;

(B) Jei jau radote vieną tokį skaičių, tai gal surastumėte dar ir kitą;

(C) Jeigu jau radote vieną tokį skaičių, ar net ir kitą, tai gal padėtumėte jiems surasti ir visus tokius skaičius ir gal net įtikintumėte (mus ir juos), kad daugiau tokių skaičių tikrai nėra.

4. Barsuko Graužtuko kieme yra toks kvadratas  $4 \times 4$ , kurio langelius galima nuspalvinti – tai su malonumu ir labai spėriai atlieka robotas, vardu Barbotas, visur žinomas kaip *tiesiog Bobas*. Nuspalvinęs jau kaip jam šaus į galvą viena kuria spalva kokį nors tos lentelės langelį *tiesiog Bobas*, baigdamas darbą, t.y. nuspalvinęs kažkiek tos lentelės langelių, visada rūpestingai ir be klaidų suskaičiuoja, kiek langelių jis iš viso nuspalvino kiekvienoje tos lentelės eilutėje ir kiek langelių jis nuspalvino kiekviename tos lentelės stulpelyje. Tuos be klaidų atliktus skaičiavimų rezultatus *tiesiog Bobas* užrašo atskirai prie kiekvienos eilutės ir taip pat atskirai po kiekvienu stulpeliu. Barsukas Graužtukas labai didžiuojasi tuo savo niekada neklystančiu skaičiuojant nuspalvintus kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio langelius *tiesiog Bobu*. Vakar Barsuko Graužtuko svečiai po beržų graužimo sėdę ant kranto ką tik išvarvėjusios sulos paragauti rado tokią *tiesiog Bobo* po eilinio dažymo atliktą statistiką (pačios lentelės langeliai delikačiai pridengti marška):

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

Kadangi šį kartą Barsuko Graužtuko svečiai tikrai niekur neskubėjo, todėl svetingas šeimininkas pirmiausiai paklausė:

(a) ar pagal *tokią tiesiog Bobo* atliktą eilučių ir stulpelių nuspalvinimo statistiką tikrai įmanomas toks kai kurių lentelės langelių nuspalvinimas?

(b) jei toks kai kurių lentelės langelių nuspalvinimas įmanomas, tai kiek jų yra iš viso? Nupieškite visus tokius nuspalvinimo būdus.

Taigi (a) atveju atsakymas yra „taip“ arba „ne“ paaiškinant kodėl „taip“, arba kodėl „ne“; o jeigu „taip“ – tai tada ir „konkrečiai kiek“?

5. Barsukas Karolis liko sužavėtas tokia perskaityta žmogiškąja *fantazy* istorija apie senelę Gertrūdą ir jos septynias triufelių lėkštutes, kiekvienoje iš kurių buvo po skirtingą triufelių skaičių.

Senelės Gertrūdos *žavusis skaitinis stebuklas* buvo tas, kad ji galėdavo nuimti kokią nori iš tų 7 lėkštučių, o visus jos triufelius išbarstyti po likusias 6 lėkštutes taip, kad kiekvienoje iš tų likusių 6 lėkštučių triufelių pasidaro po lygiai.

Tas senelės Gertrūdos *žavusis skaitinis stebuklas* Barsuką Karolį užbūrė taip smarkiai, kad jis net nepajuto, kaip griebė popieriaus skiautę ir ėmė rašinėti ieškodamas, su kokiu pačiu mažiausiu triufelių skaičiumi pačioje daugiausiai triufelių turinčioje lėkštutėje senelei Gertrūdai visada pavyks jos *žavusis skaitinis stebuklas*.

Paaiškinkite mums, kaip čia bus, nes mes čia kol kas nieko nesuprantame.

**Organizuoja**  
**Vilniaus universitetas**

**Remia**  
**UAB „AFFECTO LIETUVA“**  
**LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,**  
**Leidykla TYTO ALBA,**  
**NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,**  
**LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA**

**XV LIETUVOS 7–8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ**  
**MATEMATIKOS OLIMPIADA**  
**Konkurso dalyvius sveikina**  
**Roza LEIKIN**  
**Tarptautinės gabiųjų ugdymo ir kūrybingojo mokymo**  
**Asociacijos Prezidentė**

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2013 09 28

1. Kartą kurmis Karolis geraširdiškai šaipėsi iš savo pažįstamo Bebro Babrungo-Bungo, kuris išgirdo ir patikėjo, kad visi žmonių vaikai nori mokytis kaip žvėrys, ėmė ir į įlindo Gelgaudiškyje pas juos per plyšį pasiklausti, ką jie ten sprendžia, bet nieko nesuprato. Atėjęs pas Karolį jis gaudžiai guodėsi, koks jis bukas esąs. Karolis vis kartodavo Babrungui-Bungui vieną tokį metodinį pamokymą: „Kol tiems Gelgaudiškio vaikėzams nepersakai uždavinio su saldainiais, o tau – su nugrauztais medžiais, tol jūs nieko nesuprantat – pas jus visus kažkokia ribota fantazija ir modifikuotas pasaulio suvokimas. Štai kad ir tas primityvus uždavinys, dėl kurio tu čia taip blaškaisi ne ką tesuprasdamas. Žiūrėk, aš Tau persakysiu jį su graužtiniais kamienais ir tau kaip mat prašviesės.

„Per 2 mėnesius – liepą ir rugpjūtį – Bebras Babrungas-Bungas nugrauzė 130 liepų. Kiek liepų jis nugrauzė rugpjūčio mėnesį, jeigu liepos mėnesį jis tingėjo kaip šeškas ir jo liepos mėnesį nugrauztų medžių skaičius, padaugintas iš 3, teduotų tik vieną trečiąją rugpjūčio mėnesį nugrauztų liepų dalį.“

Giliai susimąstė Bebras Babrungas-Bungas, bet per tris valandas uždavinį įveikė. Padėkite jam galutinai įsitikinti, kad jis viską padarė gerai. Taigi kiek medžių jis nugrauzė per rugpjūtį ir kodėl?

2. Kurmio Karolio teta Kas(t)ė Rausytė nuo jaunų dienų tiki į triženklių skaičių harmoniją. Ji labai vertina visus tokius triženklus skaičius ir laiko, kad jie nebe reikalo yra mokslininkų sugalvoti – taip jai be jokių juokų atrodo – kuriuos galima gauti prie kažkokio konkretaus triženklis skaičius pridėjus visus tris to konkretaus skaičius skaitmenis. Sakysime, skaičius 225 jai atrodo ne be reikalo mokslininkų išgalvotas, nes yra toks triženklis skaičius, vardu 216, prie kurio pridėjus jo visus tris skaitmenis 2, 1 ir 6 tikrai taip ir išeina, kaip Leokadijai norėtusi:  $216 + 2 + 1 + 6 = 225$ .

Jau kuris laikas teta Leokadija visus savo giminaičius ir pažįstamus siaubia klausimu, koks gi yra pats didžiausias triženklis skaičius, apie kurį niekaip nepasakysi-neįrodysi-negausi, kad jis yra ne be reikalo mokslininkų sugalvotas?

3. Gelgaudų apskrities futbolo turnyre dalyvauja 17 komandų, kurios po vieną kartą sužaidžia su kiekviena kita turnyre dalyvaujančia komanda. Gelgaudų apskritis yra bebaimių žmonių kraštas, bet dabar ten mėgina siautėti ekstrasensas Boleslovas, kuris sako, jog Gelgaudiškio apskritis žlugs, kai ten įvyks toks 17 komandų turnyras, kuriame

kiekviena iš tų 17 dalyvaujančių komandų laimės lygiai tiek rungtynių, kiek jų ji sužais lygiomis?

Kilo sąmyšis ir karštos galvos jau norėjo skelbti referendumą, kuriame būtų apskritai draudžiama toliau rengti apskrities futbolo čempionatą. Išgirdęs apie tai apskrities valdytojas Kikutis ėmė kikenti.

Kodėl ėmė kikenti apskrities valdytojas Kikutis?

4. Kurmis Karolis, jo paties žodžiais tariant, su malonumu daro du dalykus: pirmiausia po metrą velėna rausia statmenus vienas kitam takus, o išlindęs ant žemės dėlioja arba stumdo akmenukus. Jie su savo nauju kolega Bebru Babrungu-Bungu užsidedę išspręsti tokį uždavinį, kuriame reikia ant asfalto esančiame  $3 \times 3$  kvadrato į kiekvieną langelį atstumti po kažkiek akmenukų (nors ir nebūtina ką nors atstumti į kiekvieną iš 9 tos lentelės langelių) taip, kad visose trijose eilutėse ir visuose trijuose stulpeliuose skaičiuojant atskirai (visais šešiais atvejais) būtinai būtų po skirtingą akmenukų skaičių, o pačių akmenukų – tai kurmių garbės reikalas - kuo mažiau.

Barsukas Bilis, pravarde Kledaras, besišlaistydamas aplinkui, talandija, kad tai ne kurmių nosies reikalas, o visi likę išmintingesni paukščiai ir žvėreliai kikena iš Kledaro, sakydami, kad net apsisnargliavę žmonių vaikai nekalba apie tai, ko visai neišmano.

Taigi, kiek mažiausiai akmenų reikėtų sunaudoti išstumiant juos (nebūtina į visus) lentelės  $3 \times 3$  langelius taip, kad visur: ir kiekvienoje eilutėje, ir kiekviename stulpelyje (visais šešiais atvejais) būtų po skirtingą akmenų skaičių.

Ar tai įmanoma padaryti ir jei taip, tai su koku mažiausiu akmenukų skaičiumi tai įmanoma atlikti?

(A) pirmiausiai nurodykite kokį nors vieną tokį akmenukų išdėliojimą.

(B) nurodykite, kiek mažiausiai akmenukų užtenka tokiai akmenukų dėlionei ir paaiškinkite, kodėl su mažiau akmenukų to padaryti negalima.

5. Keturi jauni nemokyti bebriūkščiai, keturi neapsiplunksnavę bebro Babrungo-Bungo įpėdiniai Morkūnas, Narūnas, Ovidijus ir Perkūnas syki darė testą su pasirenkamais atsakymais, susidedantį iš keturių klausimų, iš kurių kiekvienas turi penkis atsakymus A, B, C, D ir E. Morkūno atsakymai buvo DDAE, Narūno – CBAD, Ovidijaus – CDAC, o Perkūno – BBCC. Atėjęs kurmis Karolis jiems pranešė, kad pas juos visus keturis yra lygiai po 2 teisingus atsakymus. Po to jis paprašė savo asistentą jauną lapiną Nikodemą-Nikį visiems išaiškinti, į kokius čia atsakymus tauta teisingai tiki?

Taigi kokie yra teisingi atsakymai į keturis testo klausimus?

6. Ant žemės guli 9 akmenų krūvos (kiekvienoje bent po vieną akmenį). Bebras Babrungas-Bungas patikrino, kad bet kuriose dviuose krūvose yra po skirtingą akmenų skaičių, o didžiausioje krūvoje, jo žodžiais tariant, yra  $n$  akmenų. Vėliau jam dar paaiškėjo, kad bet kurios vienos krūvos visus akmenis įmanoma sumesti į likusias akmenų krūvas taip, kad gautose 8 krūvose būtų po lygiai akmenų. Negana to, bet kurių dviejų krūvų visus akmenis įmanoma sumesti į likusias akmenų krūvas taip, kad gautose 7 krūvose būtų po lygiai akmenų. Sužinokite mažiausią galimą  $n$  reikšmę.