Organizuoja

Vilniaus universitetas

Remia

UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XIV LIETUVOS 5–6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2012 09 29

Konkurso dalyvius sveikina
Pasaulinės nacionalinių matematikos varžybų federacijos Prezidentas
Alexander SOIFER

1. Apuokas Apolinaras yra labai drąsus paukštelis, tačiau net ir jis labai privengia kiekvieno tokio dviženklio skaičiaus, kurio kuris nors vienas skaitmuo yra trimis vienetais didesnis už kitą jo skaitmenį. Visus kitus likusius dviženklius skaičius Apuokas Apolinaras stačiai garbina. Apuokas Apolinaras, kaip ir kiekvienas Juokų miške rinkimų teisę turintis subrendęs paukštelis, puikiai žino, kad pats didžiausias dviženklis skaičius yra 99, o mažiausias – 10. Kiekvienas žvirblis Juokų miške jums tuojau patvirtins, kad Apuokas Apolinaras, pavyzdžiui, privengia skaičių 14 ir 52, o stačiai garbina, sakysime, jų kaimynus 13 ir 51. O kiek yra iš viso tokių dviženklių skaičių, kuriuos stačiai garbina Apuokas Apolinaras?

2. Genelis Baltrus, kuris pats yra nemenkas paukščių profsąjungų aktyvistas ir, ko čia slėpti, Atamano Šarkos patikėtinis ir patarėjas, baigęs pamainą sausoje pušyje labai mėgsta sausoje pušyje dar pakalinėti ir padėlioti stulpeliu, o įsidrąsinęs – ir padauginti. Pastaruoju laiku Juokų miške pasidarė madinga dvigubinti skaičius. Štai vakar po pamainos Genelis Baltrus pasiėmė dviženklį skaičių, kuris buvo be nulių (nulių genelis Baltrus absoliučiai nemėgsta, o skaičių su nuliniais skaitmenimis jis net ir rimtais skaičiais nelaiko), nedelsdamas padvigubino jį ir su palengvėjimu įsitikino, kad ir padvigubintame skaičiuje jokių nulių nėra. Ir tada jis ilgam susimastė begalvodamas, kiek daugiausiai kartų taip dvigubinant skaičius ir išvengiant nulių ir prieš dvigubinimą, ir po jo, gali sumažėti dvigubinamojo skaičiaus skaitmenų sandauga. (Kad dvigubinant skaičių jo skaitmenų sandauga tikrai gali sumažėti, Genelis Baltrus puikiai įžvelgia iš pavyzdžio 61 x 2 = 122)

Taip genelis Baltrus sėkmingai išsprendė uždavinį: dviženklį skaičių be nulinių skaitmenų padvigubinome ir vėl gavome skaičių be nulių. Kiek daugiausiai kartų po vieno tokio dvigubinimo galėjo sumažėti to padvigubintojo skaičiaus skaitmenų sandauga?

Kokį atsakymą gavo Baltrus?

3. Genelis Baltrus nėra labai prietaringas, bet vieną kartą išsitarė, kad tik toks paukštelis, kuris susigaudo, ar galima 9 x 3 stačiakampį padalinti į 8 nepersiklojančius, nebūtinai vienodo dydžio kvadratėlius, ar negalima, tik toks paukštelis tegalėtų būti prileistas, pavyzdžiui, prie naktinių pasiskraidymų.

Taigi ar galima padalinti 9 x 3 stačiakampį į 8 nepersiklojančius, nebūtinai vienodo didumo kvadratėlius?

4. Aukštojoje Šarkų akademijoje mokslas trunka vienerius, dvejus, trejus, ketverius arba net ištisus penkerius metus, o konkursai ten yra neapsakomai dideli – kai stojantieji skrenda į stojamąjį egzaminą Paberžėn, dangus pajuosta nuo uolių skraiduolių. Per stojamąjį egzaminą visada yra duodami 5 uždaviniai ir vertinant yra skaičiuojami tik pilnai išspręsti uždaviniai – jei pilnai išsprendei 1 uždavinį, tai Aukštojoje Šarkų akademijoje gali mokytis vienerius metus, jei išsprendei 2 pilnus uždavinius, tai gali mokytis net dvejus ir taip toliau iki pat galo: jeigu jau išsprendei visus 5 duotus uždavinius, tai gali semtis šarkiškosios išminties, vargu ar kuo benusileidžiančios žmogiškai, ištisus penkerius metus.

Ką tik įvyko 2012 metų stojamieji uždaviniai į aukštąją Šarkų Akademiją, kuriame dalyvavo gal apie pusė milijono šarkų. Bent po vieną uždavinį pilnai išsprendė ir į Aukštąją Šarkų akademiją buvo priimti 120 pačių išmintingiausiųjų paukščių, išsprendusių, kaip buvo nurodyta, bent po vieną pilną uždavinį. Iš viso tie 120 įstojusiųjų visi kartu pateikė 277 pilnus uždavinių sprendimus. Paaiškėjo, kad trečdalis įstojusiųjų galės mokytis vienerius metus, ketvirtadalis – dvejus, penktadalis – trejus metus. Ar galima garantuotai sakyti, kad tikrai bus kam Aukštojoje Šarkų akademijoje mokytis ir ištisus penkerius metus ir jeigu jau taip, tai kodėl?

5. Pats sudėtingiausias uždavinys, kurį šarkaitės ir šarkaičiai gauna spręsti Matematiniame šarkų lopšelyje „Du skryst vienas“ yra toks:

Ant kiekvieno iš dvidešimt penkių 5 x 5 lentos langelių pirmiausiai yra padedama („paberiama“) bent po vieną grūdelį, griežtai laikantis taisyklės, kad ant jokių dviejų langelių negalima padėti po tiek pat grūdelių, o padedamų grūdelių skaičius jokiame langelyje negali viršyti 25 grūdelių.

Toliau yra rūpestingai suskaičiuojama, kiek grūdelių tokiu būdu atsiranda ir kiekvienoje iš penkių tos lentelės eilučių, ir kiekviename iš penkių tos lentelės stulpelių, ir kiek jų tokiu būdu atsiranda abiejose ilgosiose įstrižainėse.

Grūdelių išdėliojimas yra laikomas *stulbinančiu*, jei ir visose penkiose tos lentelės eilutėse, ir visuose penkiuose tos lentelės stulpeliuose, ir abiejose ilgosiose įstrižainėse randame po nelyginį grūdelių skaičių.

Grūdelių išdėliojimas vadinamas *nerealiu*, jeigu ir visose penkiose tos lentelės eilutėse, ir visuose penkiuose tos lentelės stulpeliuose, ir abiejose ilgosiose įstrižainėse randame padėta po lyginį grūdelių skaičių.

Sakysime, grūdelių išdėliojimas

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

nebūtų nei stulbinantis, nei nerealus, nes pirmosios eilutės grūdelių suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ yra nelyginė, o antrosios $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$ yra lyginė.

Ar yra įmanoma turėti stulbinantį grūdelių išdėliojimą ir ar galima turėti nerealų grūdelių išdėliojimą ir kodėl?

Kiekvienu atveju, jeigu sakote, kad galima, tai tada parodykite, kaip tai padarėte, o jei negalima, tai suprantamai paaiškinkite, kodėl tai yra neįmanoma.

Organizuoja

Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA"
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XIV LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Konkurso dalyvius sveikina
Tarptautinės kūrybingumo ir gabiųjų ugdymo asociacijos Prezidentė
Roza Leikin

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2011 09 29

1. Genelis Baltrus, kuris pats yra didis paukščių profsąjungų aktyvistas ir, ko čia slėpti, paties Atamano Šarkos rinkimų patikėtinis ir asmeninis patarėjas, baigęs pamainą labai mėgsta sausoje pušyje dar pakalinėti kokią sudėtį stulpeliu ar dalybą kampu. Pastaruoju metu kaip kokia epidemija Juokų miške paplito skaičių dvigubinimas. Štai ir vakar prieš skrisdamas namo Grainio liepoje Genelis Baltrus dar susirado triženklį skaičių, kuris buvo, žinoma, be nulių (nuo nulinių skaitmenų Genelis Baltrus čiaudėja), padvigubino jį ir lengviau atsiduso pamatęs, kad ir padvigubintame skaičiuje nulinių skaitmenų nėra. Ir pradėjo jis galvoti, kiek daugiausiai kartų taip dvigubinant gali sumažėti dvigubinamojo skaičiaus skaitmenų sandauga. (O kad nuo dvigubinimo triženklio skaičiaus skaitmenų sandauga gali sumažėti Genelis Baltrus įsitikino žiūrėdamas į pavyzdį: $661 \cdot 2 = 1322$).

Kitaip sakant, genelis Baltrus turi "sukalti" tokį uždavinį. Triženklis skaičius be nulinių skaitmenų buvo padvigubintas ir nulinių skaitmenų padvigubintame skaičiuje vėl nėra. Kiek daugiausiai kartų po vieno tokio padvigubinimo gali sumažėti triženklio skaičiaus skaitmenų sandauga?

2. Šarkų, kėkštų ir blezdingų profiliuotoje dailiųjų amatų mokykloje, kur nuo šimtmečių sustiprintai visada buvo dėstoma aritmetika bei puošniųjų akmenukų kainų svirduliavimai, per baigiamąjį kontrolinį šiais metais, tiesa, ne visiems, o tik giliau į aritmetiką įsikertantiesiems, buvo labai rekomenduojamas toks laisvai pasirenkamas privalomas uždavinys, susidedantis iš dviejų dalių.

Pirmojoje dalyje reikėjo užrašyti kokį nors vieną 100-ženklį skaičių, kurio įprastiniame dešimtainiame užraše terandame – o kokia nuobodybė – tik nulius ir vienetus, o pats skaičius be liekanos, gražiai turi pasidalinti į 12 lygių dalių.

Antrojoje dalyje jau be jokių užuolankų buvo klausinėjama bei reikalaujama surasti jau nebe bet kokį, o jau patį mažiausią iš visų tokių 100-ženklių skaičių.

3. Erelis Hamletas kartą buvo savo palikuonio Ernesto paklaustas, kaip jis ryžosi visą gyvenimą nebepalikti tos užburiančios erdvių tolybės. Staiga surimtėjęs erelis Hamletas jam pasisakė galutinai apsisprendęs po vieno tokio ankstyvojoje vaikystėje regėto žvalaus sapno, kuriame lakštingalų choras iš pradžių "apšilimui" vis plėšė priegiesmį apie tai, kad ir dangiškoji trapecija yra va toks keturkampis, kuris lieka, kai nuo trikampio lygiagrečiai vienai kuriai nors jo kraštinei "nurėžiame" priešgulę jai viršūnę. Po to lakštingalų choras suskėlė ir pačią oratoriją, kurios paskutinė arija baigėsi žodžiais: “Ar žinai, ar žinai, ką čia sakė milžinai?”, o tikslus matematinis viso konkretaus oratorijos turinio aprašas pateikiamas žemiau ir yra toks:

Trapecijos *ABCD* vienos šoninės kraštinės *CD* ilgis yra lygus abiejų (lygiagrečių) jos pagrindų *AD* ir *BC* ilgių sumai, o kitos tos trapecijos šoninės kraštinės *AB* vidurio taškas yra *M*. Raskite kampo *CMD* didumą laipsniais.

Sužinokite ir Jūs, ką čia sakė milžinai, arba koks yra kampo *CMD* didumas laipsniais?

4. Genelis Baltrus savo sūnų Balį moko kantriai spėlioti viską, ką tik įmanoma, pavyzdžiui, visokiausius natūraliuosius (sveikuosius teigiamus) lygčių sprendinius. Genelis Baltrus savo sūnui visą savaitę kalė į galvą mintį, kad turint lygtį $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{19}{94}$, kur m ir n yra natūralieji skaičiai, be didesnio vargo, beveik vien tik spėliojant, galima:

(A) per 33 minutes net ir be jokių didelių teorijų atspėti vieną tokią natūraliųjų skaičių porą (m; n) porą, tinkančią tai lygčiai;

(B) atspėjus vieną porą, per minutę galima nurodyti ir antrą tokią tinkamą porą.

(C) toliau genelis Baltrus tiesiai paklausė sūnų Balį, kiek iš viso yra tokių porų?

5. Atamanas Šarka ir 5 netolimi jo giminaičiai Šarkonis, Šarkėla, Šarkūnas, Šarkūnijus ir Šarkauckas treniruoja kiekvienas po savo futbolo komandą. Vieno šlovingo tos giminės susiskridimo proga įvyko ir visų tų 6 komandų turnyras, kur kiekviena komanda, suprantama, sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Šarkūniniuose turnyruose, kaip ir visuose elitiniuose turnyruose, už laimėtas rungtynes komandai visada skiriami 3 taškai, už lygiąsias – 1 taškas, o už pralaimėtas rungtynes komanda gauna 0 taškų. Pasibaigus turnyrui pasirodė, kad visos jame dalyvavusios komandos surinko po skirtingą taškų skaičių, o pirmąją vietą, kaip jūs turbūt jau visi nujaučiate, užėmė paties atamano treniruojama komanda, surinkusi vos 5 taškais daugiau už pačioje paskutinėje vietoje likusią komandą – tokios retos harmonijos buvo tas turnyras.

Bet ar tikrai taip galėjo būti?

Kiek taškų tada galėjo sukaupti pirmoji ir kiek jų sukaupė paskutinioji to dabar jau aiškiai legendinio turnyro komanda.

Ir jeigu jau taip tikrai galėjo būti, tai tada pateikite mums galimą to turnyro lentelę, kurioje viską ir surašykite, nurodydami kas su kuo ir kaip sužaidė.

6. Atamano Šarkos pavedimu doktorantas Apuokas su savo magistrantais kėkštais ir bakalaurais žvirbliais absoliučiai – neįtikėtina, bet be klaidų, įsidėmėkite, be klaidų – sudaugino visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 2012 ir, iš gautosios sandaugos atėmę 1, gautąjį skaičių užrašė plonoje ilgoje popieriaus juostelėje. Po to jie visi spoksodami į tą juostelę pradėjo ryžtingai galvoti, kiek mažiausiai skaitmenų tame ilgoje popieriaus juostelėje užrašytame skaičiuje gana būtų pakeisti nuliais, kad tas skaičius jau dalintųsi iš 13?

Atamanas Šarka ta proga pajuokavo kaip reta atvirai, kad išgirdo visas paukščių juokų slėnis, nors tą aforizmą visi jau ne sykį buvo girdėję: atamanas Šarka vėl pakartojo, kad padoriems paukščiams siūlomi uždaviniai būna dvejopi: paprasti arba įdomūs.